Einführung Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen
Übungsblatt 8 WS 2022/23

Prof. Dr. M. Růžička, Dr. A. Kaltenbach **Abgabetermin:** 12. Dezember 2022

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Sei $T \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, ein n-dimensionales Simplex mit entsprechenden baryzentrischen Koordinaten $\lambda_0(x), \ldots, \lambda_n(x)$. Weiter sei $\mu \in (0,1)$ und

$$S = \{x \in T \mid \lambda_n(x) = \mu\}.$$

Zeigen Sie, dass S ein $(n-1)$-dimensionales Simplex ist, und bestimmen Sie die baryzentrischen Koordinaten $\widetilde{\lambda}_0(x), \ldots, \widetilde{\lambda}_{n-1}(x)$ (bezüglich S) eines Punktes $x \in S$ in Abhängigkeit von seinen Koordinaten $\lambda_0(x), \ldots, \lambda_n(x)$.

Aufgabe 2 (7 Punkte)

Seien $T \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, ein n-dimensionales Simplex und T_0 das n-dimensionale Einheitssimplex in $\mathbb{R}^n$. Seien $(\lambda_0(x), \ldots, \lambda_n(x))$ und $(\overline{\lambda}_0(y), \ldots, \overline{\lambda}_n(y))$ die baryzentrischen Koordinaten bezüglich T bzw. T_0. Für $\alpha \in \mathbb{N}_0^{n+1}$ definieren wir $\alpha! = \alpha_0! \cdots \alpha_n!$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen gelten:

(a) Für alle $\beta, \gamma \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\int_0^1 t^\beta (1-t)^\gamma \,\mathrm{d}t = \frac{\beta!\,\gamma!}{(\beta+\gamma+1)!}\,.$$

Tipp: Gehen Sie induktiv vor.

(b) Es gilt:

$$\int_T \lambda^\alpha(x)\,\mathrm{d}x = \frac{|T|}{|T_0|} \int_{T_0} \overline{\lambda}^\alpha(y)\,\mathrm{d}y\,.$$

(c) Es gilt:

$$\int_T \lambda^\alpha(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\alpha!\,n!}{(|\alpha|+n)!}|T|\,.$$

Tipp: Gehen Sie induktiv vor und nutzen Sie Aufgabe 1 sowie die Aufgabenteile (a) und (b).

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Sei $T \subset \mathbb{R}^2$ ein zweidimensionales Simplex mit den Ecken a_0, a_1, a_2 und Kantenmittelpunkten a_{01}, a_{02}, a_{12}. Ferner sei $p \in \mathbb{P}_2(T)$. Bestimmen sie den Wert des Integrals

$$\int_T p(x)\,\mathrm{d}x$$

in Abhängigkeit von $p(a_i)$ und $p(a_{ij})$, wobei $i, j \in \{0,1,2\}$ mit $i < j$ ist.

Tipp: Verwenden Sie die Darstellung quadratischer Polynome in baryzentrischen Koordinaten aus dem Skript und Aufgabe 2.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Seien $n, k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass eine Konstante $c > 0$ existiert, sodass für jeden Ball $B \subseteq \mathbb{R}^n$ und jedes Polynom $p \in \mathbb{P}_k(B)$ gilt

$$\frac{1}{c}\,\|p\|_{L^\infty(B)} \leq \frac{1}{|B|}\,\|p\|_{L^1(B)} \leq c\,\|p\|_{L^\infty(B)}\,.$$

Tipp: In einem endlichdimensionalen Raum sind alle Normen äquivalent.