Abteilung für Angewandte Mathematik

Prof. Dr. M. Růžička
Dr. A. Gazca

26. Oktober 2022

Praktische Übung zur Vorlesung

Einführung in die Theorie und Numerik Partieller Differentialgleichungen

WS 2022/23 — Blatt 1

Abgabe: 9.11.2019, via Email an den Tutor.

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Wir betrachten das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x) \text{ auf } (a,b), \\ u(a) &= 0, \\ u(b) &= 0. \end{aligned}$$

(a) Implementieren Sie ein Finite-Differenzen-Verfahren zur Lösung des obigen Randwertproblems mit $f(x) = 4\pi^2 \sin(2\pi x)$ auf dem Interval $[0,1]$ mit Randwerten $u(0) = u(1) = 0$. Nutzen Sie zur Approximation der zweiten Ableitung den Differenzenquotienten

$$u''(x) \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}$$

mit $u_i = u(ih)$.

(b) Die exakte Lösung ist gegeben durch $u = \sin(2\pi x)$. Lösen Sie das Rabdwertproblem aus Aufgabe (a) mit Schrittweiten $h = 2^{-j}$, $j = 1, ..., 5$ und berechnen Sie den Fehler

$$E_h = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N} |u_i - u(x_i)|.$$

Stellen Sie das Ergebnis graphisch dar.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Eine weitere Möglichkeit zur Lösung des obigen Randwertproblems ist via Finiter-Elemente. Dazu wird die erste Gleichung des obigen Randwertproblems zunächst mit einer Testfunktion $\phi \in C_0^1((a,b))$ multipliziert und dann über das Intervall (a,b) integriert. Danach folgt mit partieller Integration, unter Verwendung des Integralsatzes von Gauß und wegen $\phi(a) = \phi(b) = 0$ die Gleichung:

$$\int_a^b u'\phi' \, \mathrm{d}x = \int_a^b f\phi \, \mathrm{d}x$$

für alle $\phi \in C_0^1((a,b))$.

Für eine gegebene gleichmäßige Partition $[ih,(i+1)h]_{i=0,\ldots,(1/h)-1.}$ von $(0,1)$ betrachten wir den Raum

$$S_1 = \{s \in C_c^0([0,1]) \colon s \in P_1([ih,(i+1)h])\},$$

wobei $P_1([ih,(i+1)h])$ der Raum der Polynome mit maximalem Grad eins auf dem Intervall $[ih,(i+1)h]$ sei.

(a) Eine mögliche Basis dieses Raumes sind die sogenannten Hütchenfunktionen s_i , welche durch die Vorschrift

$$s_i(jh) = \delta_{ij}$$

gegeben sind. Berechnen sie zunächst per Hand die Steifigkeitsmatrix S, welche gegeben ist durch

$$S_{ij} = \int_a^b s_i' s_j' \,\mathrm{d}x, \quad \forall \text{ Basisfunktionen } s_i.$$

(b) Um eine Lösung des Randwertproblems zu bekommen, muss nun das Gleichunssystem

$$S \cdot u = b, \quad \text{mit } b_i = \int f s_i \,\mathrm{d}x$$

gelöst werden. Impelmentieren Sie dazu ein Programm, welches die obige Gleichung löst und visuallisieren Sie die Lösung u. Zur Berechnung der Integrale auf der rechten Seite benutzen Sie die Vereinfachung

$$\int_{(i-1)h}^{(i+1)h} f s_i \,\mathrm{d}x \approx f(ih) \int_{(i-1)h}^{(i+1)h} s_i \,\mathrm{d}x.$$

Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit den Ergebnissen aus der ersten Aufgabe.