Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. M. Růžička
Dr. A. Gazca

23. November 2022

Praktische Übung zur Vorlesung

Einführung in Theorie und Numerik Partieller Differentialgleichungen

WS 2022/23 — Blatt 3

Abgabe: 7.12.2022, via Email an den Tutor.

Aufgabe 1 (Triangulierungen) (5 Punkte)

Laden Sie die beiden Matlab-Codes von der Hompage herunter und bearbeiten Sie folgende Aufgaben.

(a) Kommentieren Sie zunächst die Funktionsweise der Funktion **redrefine.m**.

(b) Erzeugen Sie mit der obigen Funktion Triangulierungen der Gebiete $\Omega_1 = [0,1]^2$ und $\Omega_2 = \Omega_1 \setminus [0.5,1]^2$ für $red = 4, 5$, indem Sie den Code **triang.m** geeignet anpassen. Wählen Sie auch geeignete Randdaten.

(c) Eine weitere Möglichkeit eine Triangulierung zu erzeugen ist mittels einer sogenannten Delaunay-Triangulierung. Recherchieren Sie zunächst die Funktionsweise einer solchen Triangulierung und kommentieren Sie diese.

(d) Schreiben Sie eine Funktion, welche eine Delaunay-Triangulierung der Einheitskreisscheibe

$$K = \{r\cos(s) + r\sin(s) \mid r \in [0,1], s \in [0,2\pi]\}$$

berechnet. Diese sollte auch die Randwerte berücksichtigen. Visuallisieren Sie Ihre Ergebnisse.

Aufgabe 2 (Interpolationsfehler) (5 Punkte)

Es sei $u = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$ mit $(x,y) \in [0,1]^2$. Die Lagrange-Interpolierende $I_h u$ einer stetigen Funktion u ist mit Hilfe der linearen Basisfunktionen ϕ_j, mit $\phi_j(p_i) = \delta_{ij}$, und den Gitterpunkten p_i gegeben durch die Vorschrift

$$I_h u = \sum_{i=1}^{M} \phi_i(x) u_i, \quad \text{mit} \quad u_i = u(p_i).$$

Die Werte von $I_h u$ und u stimmen also an den Gitterpunkten p_i überein. Bestimmen sie den $L^2(\Omega)$-Fehler

$$\|u - I_h u\|_{L^2(\Omega} = \left(\int_\Omega |u - I_h u|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Implementieren Sie dazu Methoden oder Funktionen die:

(a) Das Volumen eines Dreiecks der Triangulierung berechnen.

(b) Den Schwerpunkt eines Dreiecks berechnen.

(c) Den Mittelwert der Funktion u auf einem Dreieck berechnen.