Abteilung für
Angewandte Mathematik

Prof. Dr. M. Růžička
Dr. A. Gazca

21. Dezember 2022

Praktische Übung zur Vorlesung

Einführung in Theorie und Numerik Partieller Differentialgleichungen

WS 2022/23 — Blatt 5

Abgabe: 18.1.2023, via Email an den Tutor.

Aufgabe 1 (Helmholtz-Gleichung) (5 Punkte)
Betrachten Sie das Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u + u &= f \quad \text{in } \Omega := (0,1)^2, \\ \nabla u \cdot \boldsymbol{n} &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1}$$

mit exakter Lösung $\overline{u}(x) = \cos(4\pi x_0)x_1^2(1-x_1)^2$. Die Datei `fe_utils/solvers/helmholtz.py` enthält eine partielle Implementierung der Finite-Elemente-Methode zur Lösung von (1), mit $f := -\Delta\overline{u} + \overline{u}$. Implementieren Sie die Steifigkeitsmatrix und den Lastvektor in `assemble()`.

Hinweis. Die Struktur des Codes in `errornorm()` könnte nützlich sein.

Hinweis. Sie können Ihre Implementierung mit `py.test test/test_11_helmholtz_convergence.py` testen (es könnte ein paar Minuten dauern).

Hinweis. Sie können danach die diskrete Lösung, die exakte Lösung und den Fehler visualisieren, indem Sie den Code ausführen. Versuchen Sie zuerst mit `python fe_utils/solvers/helmholtz.py --help`.

Aufgabe 2 (Konvergenzordnung - h-Verfeinerung) (3 Punkte)
Berechnen Sie den Fehler $\|u_h - \overline{u}\|_{L^2(\Omega)}$ der Lösung aus Aufgabe 1, für ein $N \times N$ Gitter mit $N \in \{2^i\}_{i=2}^5$. Visualisieren Sie die Abhängigkeit des Fehlers von der Gitterweite und schätzen Sie die Konvergenzordnung mit Polynomgraden $p \in \{1, 2\}$ ab.

Hinweis. Der Code in `test/test_11_helmholtz_convergence.py` könnte nützlich sein.

Aufgabe 3 (Konvergenzordnung - p-Verfeinerung) (2 Punkte)
Berechnen Sie den L^2-Fehler für Polynomgraden $p \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$; verwenden Sie ein 8×8 Gitter. Visualisieren Sie die Abhängigkeit des Fehlers von der Anzahl der Knoten (Freiheitsgrade). Vergleichen Sie mit den Fehlern aus Aufgabe 2 ($p = 2$). Fällt Ihnen etwas auf?

Frohe Weihnachten und einen guten Start ins neue Jahr!