Prof. Dr. M. Růžička
Dr. A. Gazca

18. Januar 2023

Praktische Übung zur Vorlesung

Einführung in Theorie und Numerik Partieller Differentialgleichungen

WS 2022/23 — Blatt 6

Abgabe: 8.2.2023, via Email an den Tutor.

Aufgabe 1 (Poissongleichung mit homogener Randbedingung) (5 Punkte)
Betrachten Sie das Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega := (0,1)^2, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \ \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1}$$

mit exakter Lösung $\overline{u}(x) = \sin(4\pi x_0)(x_1 - 1)^2 x_1^2$. Die Datei `fe_utils/solvers/poisson.py` enthält eine partielle Implementierung der Finite-Elemente-Methode zur Lösung von (1), mit $f := -\Delta\overline{u}$. Implementieren Sie die Steifigkeitsmatrix und den Lastvektor in `assemble()`.

Hinweis. Die Funktion `fe_utils.solvers.poisson.boundary_nodes()` könnte nützlich sein.

Hinweis. Sie können Ihre Implementierung mit `py.test test/test_12_poisson_convergence.py` testen (es könnte ein paar Minuten dauern).

Hinweis. Sie können danach die diskrete Lösung, die exakte Lösung und den Fehler visualisieren, indem Sie den Code ausführen. Versuchen Sie zuerst mit `python fe_utils/solvers/poisson.py --help`.

Aufgabe 2 (Konvergenzordnung) (5 Punkte)
Berechnen Sie den L^2-Fehler der Lösung aus Aufgabe 1, für ein $N \times N$ Gitter mit $N \in \{2^i\}_{i=2}^5$ und $p \in \{1, 2\}$, und für ein 8×8 Gitter mit $p \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Visualisieren Sie die Abhängigkeit des Fehlers von der Anzahl der Knoten und schätzen Sie die Konvergenzordnung ab.

Bonus. Für extra 2 Punkte, berechnen Sie auch das Obige mit dem H^1-Fehler.

Aufgabe 3 (BONUS - r-Laplace Gleichung) (10 Punkte)
Betrachten Sie das Problem

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{r-2}\nabla u) &= f \quad \text{in } \Omega := (0,1)^2, \\ u &= u_b \quad \text{auf } \ \partial\Omega, \end{aligned} \tag{2}$$

mit exakter Lösung $\overline{u}(x) = e^{x_0 x_1}$. Finden Sie:

- die schwache Formulierung von (2);
- das linearisierte System;
- den entsprechenden Lastvektor $f = -\operatorname{div}(|\nabla\overline{u}|^{r-2}\nabla\overline{u})$ mit $r = 4$.

Kann man die Nullfunktion als erste Schätzung verwenden? Diskutieren Sie.

Berechnen Sie die Finite-Elemente-Lösung von (2) mit $r = 4$ und $u_b = \overline{u}|_{\partial\Omega}$; der Code sollte in `fe_utils/solvers/mastery.py` implementiert werden.

Hinweis. Sie könnten Ihren Code per r parametrisieren. Indem Sie $r = 2$ setzen, reduzieren Sie das Problem auf den linearen Fall. Sie können den linearen Fall verwenden, um Ihren Code zu testen, bevor Sie für die eigentliche Übung $r = 4$ festlegen. Beachten Sie, dass das Newton-Verfahren im linearen Fall in genau einer Iteration konvergiert (obwohl der Algorithmus tatsächlich zwei Schritte berechnen muss, um zu wissen, dass Konvergenz stattgefunden hat).

Hinweis. Dieses Problem ist absichtlich allgemeiner formuliert als die vorangegangenen. Sie sollen sich selbst für eine Codestruktur entscheiden und Konvergenztests erstellen, die zeigen, dass Ihre Lösung korrekt ist.