Übungsaufgaben – Blatt 1

Aufgabe 1 (Äquivalente Charakterisierung von $W^{1,p}(\Omega)$) **(4 Punkte)**

Sei $1 < p < \infty$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, offen und $f \in L^p(\Omega)$. Dann sind die folgenden Aussage äquivalent:

(i) $f \in W^{1,p}(\Omega)$.

(ii) Es existiert eine Konstante $c > 0$, sodass für alle $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)^\top \in C_0^\infty(\Omega)^n$

$$\left| \int_\Omega f \operatorname{div}(\boldsymbol{\varphi}) \, \mathrm{d}x \right| \leq c \, \|\boldsymbol{\varphi}\|_{L^{p'}(\Omega)^n} ,$$

wobei $\operatorname{div}(\boldsymbol{\varphi}) := \sum_{i=1}^n \partial_i \varphi_i$ und $p' := \frac{p}{p-1}$.

Aufgabe 2 **(8 Punkte)**

Sei $1 \leq p \leq \infty$ und $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, offen. Zeigen Sie:

(i) Der Sobolev-Raum $W^{1,p}(\Omega)$ ist ein Banachraum versehen mit der Norm

$$\| \cdot \|_{W^{1,p}(\Omega)} := \| \cdot \|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla \cdot \|_{L^p(\Omega)^n} .$$

(ii) Für $1 \leq p < \infty$ ist $W^{1,p}(\Omega)$ separabel. Für $1 < p < \infty$ ist $W^{1,p}(\Omega)$ reflexiv.

Tipp: Betrachten Sie $\Pi \colon W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Omega) \times L^p(\Omega)^n$, definiert durch $\Pi f := (f, \nabla f)^\top$ in $L^p(\Omega) \times L^p(\Omega)^n$ für alle $f \in W^{1,p}(\Omega)$. Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $L^p(\Omega) \times L^p(\Omega)^n$ versehen mit der kanonischen Summennorm

$$\|(f, \mathbf{f})\|_{L^p(\Omega) \times L^p(\Omega)^n} := \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|\mathbf{f}\|_{L^p(\Omega)^n}$$

einen Banachraum definiert, der für $1 \leq p < \infty$ separabel und für $1 < p < \infty$ reflexiv ist.

(iii) Für $1 \leq p < \infty$ existieren zu jedem $f^* \in (W^{1,p}(\Omega))^*$ Funktionen $f \in L^{p'}(\Omega)$ und $\mathbf{f} \in L^{p'}(\Omega)^n$, sodass $\|f^*\|_{(W^{1,p}(\Omega))^*} := \|f\|_{L^{p'}(\Omega)} + \|\mathbf{f}\|_{L^{p'}(\Omega)^n}$ und für alle $g \in W^{1,p}(\Omega)$

$$\langle f^*, g \rangle_{W^{1,p}(\Omega)} := \int_\Omega f(x) g(x) + \mathbf{f}(x) \cdot \nabla g(x) \, \mathrm{d}x .$$

Bemerkung: In der Literatur ist auch oft zu lesen, dass $(W^{1,p}(\Omega))^*$ isometrisch isomorph zu $L^{p'}(\Omega) + \operatorname{div}(L^{p'}(\Omega)^n)$ ist.

Aufgabe 3 **(3 Punkte)**

Sei $T \colon X \to X$ eine k-kontraktive Abbildung mit $0 < k < 1$ auf einem vollständigen metrischen Raum (X, d). Sei $x_0 \in X$, $x_{n+1} := T x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x := \lim_{n \to \infty} x_n$ in X. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die folgende a posteriori Abschätzung gilt:

$$d(x_{n+1}, x) \leq \frac{k}{1-k} d(x_{n+1}, x_n) .$$

Aufgabe 4 **(3 Punkte)**

Sei $p_0 \in \mathbb{R}$. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= u \quad \text{ in } I := [0,1] \ , \\ u(0) &= p_0 \, . \end{aligned} \tag{1}$$

Zeigen Sie mithilfe des Satzes von Picard-Lindelöf, dass dieses Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung besitzt. Der Satz von Picard-Lindelöf zeigt außerdem, dass die Lösung dieses Anfangswertproblems ein eindeutiger Fixpunkt von $T \colon C^0(I) \to C^0(I)$, für alle $v \in C^0(I)$ definiert durch

$$(Tv)(t) := p_0 + \int_0^t v(s)\,\mathrm{d}s \text{ für alle } t \in I\,, \tag{2}$$

ist. Weiter besagt der Satz von Picard-Lindelöf, dass der eindeutige Fixpunkt als gleichmäßiger Grenzwert der Picard-Iteration, d.h. der Folge $u_{n+1} := T u_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und ein geeignetes $u_0 \in C^0(I)$, ist. Berechnen Sie mindestens drei Iterierte der Picard-Iteration, d.h. $(u_n)_{n\in\{1,2,3\}}$, für ein $u_0 \in C^0(I)$. Leiten Sie daraus eine allgemeine Formel für alle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ab und bestimmen sie für $n \to \infty$ die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems.

Aufgabe 5 **(2 Punkte)**

Seien $a, b > 0$, $I := [-a, a]$ und $Q := I \times [-b, b]$. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= \sqrt{|u|} \quad \text{ in } I\,, \\ u(0) &= 0\,. \end{aligned}$$

Prüfen Sie, ob die Funktion $f \colon Q \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(t,x) := \sqrt{|x|}$ für alle $(t,x)^\top \in Q$, den Voraussetzungen des Satzes von Picard-Lindelöf genügt. Prüfen Sie weiter, ob das Anfangswertproblem auf I keine, eine oder mehrere Lösungen besitzt.

Bitte werfen Sie Ihre Lösungen bis spätestens 23. Oktober 2023, 10 Uhr in den Briefkasten im Untergeschoss des Matheinstituts.