Übungsaufgaben – Blatt 2

Aufgabe 1 **(4 Punkte)**

Sei $\eta \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen gelten:

(i) Die Funktion $L \colon \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$L(\mathbf{P}, \mathbf{z}) := \eta(\mathbf{z})\det(\mathbf{P})$$

für alle $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, ist eine Null-Lagrangefunktion.

(ii) Ist $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein glattes Gebiet und das Funktional $\mathcal{J} : C^2(\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$\mathcal{J}(\mathbf{u}) := \int_\Omega \eta(\mathbf{u}) \det(\nabla \mathbf{u}) \, \mathrm{d}x$$

für alle $\mathbf{u} \in C^2(\mathbb{R}^n)^n$, dann folgt für alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in C^2(\mathbb{R}^n)^n$ aus $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ in $\partial\Omega$, dass $\mathcal{J}(\mathbf{u}) = \mathcal{J}(\mathbf{v})$.

Aufgabe 2 **(4 Punkte)**

Zeigen Sie, dass die Funktionen $L_{ij} \colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, definiert durch

$$L_{ij}(\mathbf{P}) := \det \begin{pmatrix} p_{ij} & p_{ii} \\ p_{jj} & p_{ji} \end{pmatrix} = p_{ij}p_{ji} - p_{ii}p_{jj}$$

für alle $\mathbf{P} = (p_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, Null-Lagrangefunktionen sind.

Aufgabe 3 **(3 Punkte)**

Zeigen Sie, dass die Funktion $L \colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, definiert durch

$$L(\mathbf{P}) := \mathrm{Spur}(\mathbf{P}^2) - (\mathrm{Spur}(\mathbf{P}))^2$$

für alle $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, eine Null-Lagrangefunktion ist.

Tipp: Verwenden Sie Aufgabe 2.

Aufgabe 4 **(5 Punkte)**

Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen gelten:

(i) Ist $\mathbf{f} \in C^0(\overline{B^n_R(0)})^n$ für ein $R > 0$ so, dass $\mathbf{f}(x) \cdot x \leq |x|^2$ für alle $x \in \partial B^n_R(0)$, dann hat $\mathbf{f} \colon \overline{B^n_R(0)} \to \mathbb{R}^n$ einen Fixpunkt.

(ii) Ist $\mathbf{f} \in C^0(\mathbb{R}^n)^n$ so, dass $\lim_{|x|\to\infty} \frac{\mathbf{f}(x)\cdot x}{|x|} = \infty$, dann ist $\mathbf{f} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ surjektiv.

(iii) Ist $\mathbf{f} \in C^0(\mathbb{R}^n)^n$ so, dass $\lim_{|x|\to\infty} \frac{\mathbf{f}(x)\cdot x}{|x|} = \infty$ und $(\mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(y)) \cdot (x - y) > 0$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $x \neq y$, dann ist $\mathbf{f} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Bijektion.

Bemerkung: Wir werden in einem späteren Blatt sehen, dass in **(iii)** sogar gilt, dass $\mathbf{f} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Homöomorphismus ist, d.h. eine stetige Bijektion mit stetiger Inverser, d.h. **(iii)** entspricht eine höherdimensionalen Verallgemeinerung des Satzes über die Existenz einer stetigen Inversen aus Analysis I.

Aufgabe 5 **(4 Punkte)**

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, ein Gebiet, $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ außerhalb Ω identisch Null und $\varepsilon > 0$. Weiter definieren wir die Glättung mittels Faltung wie im Skript auf Seite 215. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Für $f \in L^1(\Omega)$ gilt $\omega_\varepsilon * f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$.

(ii) Für $f \in C^0(\Omega)$ und $K \subseteq\subseteq \Omega$ gilt $\omega_\varepsilon * f \to f$ $(\varepsilon \to 0)$ gleichmäßig auf K.

Bitte werfen Sie Ihre Lösungen bis spätestens 30. Oktober 2023, 10 Uhr in den Briefkasten im Untergeschoss des Matheinstituts.