Übungsaufgaben – Blatt 3

Aufgabe 1 **(4 Punkte)**

Seien X, Y normierte Vektorräume mit dim$X < \infty$, sei $M \subseteq X$ abgeschlossen und $T\colon M \subseteq X \to Y$ stetig. Zeigen Sie, dass $\overline{T(B)} = T(\overline{B})$ für alle beschränkten Mengen $B \subseteq M$ gilt. Folgern Sie, dass $T\colon M \subseteq X \to Y$ kompakt ist.

Aufgabe 2 **(5 Punkte)**

Sei S ein kompakter, metrischer Raum und X ein Banachraum. Zeigen Sie, dass der Raum

$$C^0(S, X) \coloneqq \{u\colon S \to X \mid u \text{ ist stetig}\}$$

versehen mir der Norm

$$\|u\|_{C^0(S,X)} \coloneqq \sup_{s\in S} \|u(s)\|_X = \max_{s\in S} \|u(s)\|_X$$

ein Banachraum ist. Begründen Sie insbesondere, warum das Supremum in der Norm ein Maximum annimmt.

Bemerkung: Als Banachraum besitzt $C^0(S, X)$ auch eine schwache Topologie und damit einen schwachen Konvergenzbegriff. Die schache Konvergenz in $C^0(S, X)$ lässt sehr leicht charakterisieren: Es gilt für eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C^0(S, X)$ und $u \in C^0(S, X)$, dass $u_n \rightharpoonup u$ in $C^0(S, X)$ $(n \to \infty)$ genau dann, wenn $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C^0(S, X)$ beschränkt ist und $u_n(s) \rightharpoonup u(s)$ in X $(n \to \infty)$ für alle $s \in S$. Diese Charakterisierung wurde bereits im Jahre 1934 von S. Bochner und A. E. Taylor im Artikel “Linear Functionals on certain spaces of abstractly valued functions” bewiesen. In diesem Artikel werden auch Bochner-Räume eingeführt und auf Eigenschaften wie Separabilität und Reflexivität untersucht.

Aufgabe 3 **(6 Punkte)**

Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $f \in C^0(I \times I \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $n \in \mathbb{N}$, und $\varphi \in C^0(I)$ mit $\varphi(I) \subseteq I$. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Arzela-Ascoli, dass der Integraloperator $T\colon C^0(I, \mathbb{R}^n) \to C^0(I, \mathbb{R}^n)$, definiert durch

$$(Tu)(t) \coloneqq \int_a^{\varphi(t)} f(t, s, u(s))\,\mathrm{d}s \qquad \text{für alle } t \in I\,,$$

ein kompakter Operator ist.

Aufgabe 4 **(5 Punkte)**

Sei M Teilmenge eines metrischen Raumes (X, d). Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(a) M ist (überdeckungs-)kompakt.

(b) M ist folgenkompakt.

(c) M ist präkompakt und vollständig.

Bitte werfen Sie Ihre Lösungen bis spätestens 6. November 2023, 10 Uhr in den Briefkasten im Untergeschoss des Matheinstituts.