Übungsaufgaben – Blatt 4

Definition: Seien X, Y Banachräume. Mit $L(X,Y)$ bezeichnen wir die Menge aller linearen, beschränkten Operatoren $A\colon X \to Y$. Dieser Raum ist, versehen mit der Norm

$$\|\!|A|\!\|_{L(X,Y)} \coloneqq \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|_X\le 1}} \|Ax\|_Y \,,$$

ein Banachraum. Ein Operator $A \in L(X,Y)$ mit Bild $R(A)$ hat *endlichen Rang*, falls $\dim(R(A)) < \infty$. Mit $K(X,Y)$ bezeichnen wir die Menge aller linearen, kompakten Operatoren $A\colon X \to Y$.

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Seien X und Y Banachräume. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K(X,Y)$ eine Folge kompakter Operatoren, sodass $A_n \to A$ in $L(X,Y)$ $(n \to \infty)$. Zeigen Sie, dass $A \in K(X,Y)$.

(ii) Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L(X,Y)$ eine Folge von Operatoren mit $\dim(R(A_n)) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sodass $A_n \to A$ in $L(X,Y)$ $(n \to \infty)$. Zeigen Sie, dass $A \in K(X,Y)$.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Sei X ein Banachraum, H ein Hilbertraum und $A \in K(X,H)$. Zeigen Sie, dass eine Folge von Operatoren $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L(X,H)$ mit $\dim(R(A_n)) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $A_n \to A$ in $L(X,Y)$ $(n \to \infty)$.

Tipp: Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$, sei der Operator $P_n : H \to H_n$ für jedes Element $x \in H$ definiert als das eindeutige Element $P_n x \in H_n$, sodass $\|P_n x - x\|_H = \inf_{y\in H_n} \|y - x\|_H$. Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass für alle $x \in H$ mit $\|x\|_H \le 1$ gilt, dass

$$\|P_n x - x\|_H \le \|0 - x\|_H = \|x\|_H \le 1 \,,$$

d.h. $\sup_{\substack{x\in H\\ \|x\|_H\le 1}} \|x - P_n x\|_H \le 1$.

Bemerkung: Wir beweisen in dieser Aufgabe die letzte Aussage in der Bemerkung nach dem Beweis von Satz 2.34, d.h. dass die Approximation von kompakten Operatoren durch Operatoren mit endlichem Rang im Ganzraumfall funktioniert, falls der Bildbereich ein Hilbertraum ist. Insbesondere vereinfacht sich die Konstruktion dieser Approximationen im Vergleich zum Beweis von Satz 2.34 erheblich.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Sei $1 \le p \le \infty$ und $S \subseteq \mathbb{R}$ messbar. Zeigen Sie, dass der Bochner–Raum $L^p(S;\mathbb{R})$ mit dem klassischen Lebesgue–Raum $L^p(S)$ übereinstimmt, d.h. für alle $f \in L^p(S;\mathbb{R})$ bereits $f \in L^p(S)$ gilt bzw. für alle $f \in L^p(S)$ auch $f \in L^p(S;\mathbb{R})$ gilt.

Aufgabe 4 **(7 Punkte)**

Seien X und Y Banachräume, $1 \leq p \leq \infty$, $S \subseteq \mathbb{R}$ messbar und $A\colon X \to Y$ linear und stetig. Zeigen Sie, dass der **linear induzierte** Operator $\boldsymbol{\mathcal{A}}\colon L^p(S;X) \to L^p(S;Y)$, definiert durch

$$(\boldsymbol{\mathcal{A}}u)(t) \coloneqq A(u(t)) \quad \text{in } Y \quad \text{für f.a. } t \in S\,,$$

wohldefiniert, linear und stetig ist. Zeigen Sie außerdem, dass für alle $u \in L^1(S;X)$ gilt, dass

$$\int_S (\boldsymbol{\mathcal{A}}u)(t)\,\mathrm{d}t = A\bigg(\int_S u(t)\,\mathrm{d}t\bigg) \quad \text{in } Y\,.$$