Übungsaufgaben – Blatt 5

Aufgabe 1 **(5 Punkte)**

Seien X und Y Banachräume, $1 \leq p \leq \infty$, $S \subseteq \mathbb{R}$ messbar und $A\colon X \to Y$ linear und stetig. In Aufgabe 5 in Blatt 4 haben wir gesehen, dass der linear induzierte Operator $\boldsymbol{\mathcal{A}}\colon L^p(S;X) \to L^p(S;Y)$, definiert durch

$$(\boldsymbol{\mathcal{A}}u)(t) := A(u(t)) \quad \text{in } Y \quad \text{für f.a. } t \in S,$$

wohldefiniert, linear und stetig ist. Zeigen Sie weiter die folgenden Aussagen:

(i) Ist $A\colon X \to Y$ eine Einbettung, d.h. zusätzlich injektiv, dann ist auch $\boldsymbol{\mathcal{A}}\colon L^p(S;X) \to L^p(S;Y)$ eine Einbettung.

(ii) Ist $A\colon X \to Y$ ein Isomorphismus, dann ist auch $\boldsymbol{\mathcal{A}}\colon L^p(S;X) \to L^p(S;Y)$ ein Isomorphismus.

Aufgabe 2 **(5 Punkte)**

Sei $1 \leq p < \infty$, $S \subseteq \mathbb{R}$ offen und $D \subseteq X$ eine dichte Teilmenge des Banachraumes X und C eine dichte Teilmenge von $L^p(S)$. Zeigen Sie, dass die Menge

$$M := \left\{ \sum_{i=1}^{n} d_i f_i \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ f_i \in C,\ d_i \in D \text{ für } i = 1, \dots, n \right\}$$

dicht in $L^p(S;X)$ ist.

Aufgabe 3 **(5 Punkte)**

Sei $1 \leq p < \infty$, X ein Banachraum und $S \subseteq \mathbb{R}$ messbar mit $0 < |S| < \infty$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $L^p(S;X)$ ist separabel.

(ii) $L^p(S)$ und X sind separabel.

Tipp: Für **(i)** nach **(ii)** verwenden Sie die Abbildungen

$$\begin{aligned} A &:= (x \mapsto |S|^{-\frac{1}{p}} \chi_S(\cdot) x) : X \to L^p(S;X), \\ B &:= (f \mapsto x_0 f)\colon L^p(S) \to L^p(S;X), \end{aligned}$$

wobei $x_0 \in X$ mit $\|x_0\|_X = 1$. Für **(ii)** nach **(i)** verwenden Sie Aufgabe 2.

Bemerkung: In dieser Aufgabe dürfen Sie nicht verwenden, dass $L^p(S)$ für $1 \leq p < \infty$ immer separabel ist, sondern Sie sollen dies aus der Separabilität von $L^p(S;X)$ folgern.

Aufgabe 4 **(5 Punkte)**

Sei $1 \leq p < \infty$, $S \subseteq \mathbb{R}$ eine messbare Menge und X ein Banachraum. Seien weiter $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p(S;X)$, $g \in L^p(S;\mathbb{R})$ und gelte für ein Bochner messbares $u\colon S \to X$

$$u_n(t) \to u(t) \quad \text{in } X \quad (n \to \infty) \qquad \text{für f.a. } t \in S\,, \tag{1}$$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_n(t)\|_X \leq |g(t)| \qquad \text{für f.a. } t \in S\,. \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass $u_n \to u$ in $L^p(S;X)$ $(n \to \infty)$ gilt.

Geben Sie für den Fall $S = (0,1)$ eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p(S;X)$ und eine Funktion $u \in L^p(S;X)$ an, die (1) aber nicht (2) und nicht $u_n \to u$ in $L^p(S;X)$ $(n \to \infty)$ erfüllen.