Übungsaufgaben – Blatt 6

Aufgabe 1 **(6 Punkte)**

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x,y) := |(x,y)^\top| = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$ für alle $(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2$, erfüllt $f \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\};\mathbb{R})$, ist in $(0,0)^\top$ aber nicht Gâteaux–differenzierbar.

(ii) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{falls } (x,y)^\top = (0,0)^\top\,, \\ \left(\frac{xy^2}{x^2+y^4}\right)^2 & \text{falls } (x,y)^\top \neq (0,0)^\top\,, \end{cases}$$

für alle $(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2$, ist in $(0,0)^\top$ Gâteaux–, aber nicht Fréchet–differenzierbar.

Exkurs: Die klassische Zeitableitung

In der Vorlesung haben wir den Begriff der Fréchet–differenzierbarkeit nur auf offenen Mengen definiert. Gerade in der Untersuchung von parabolischen partiellen Differentialgleichungen ist es oft nötig einen Differenzierbarkeitsbegriff an den Randpunkten eines Intervalls zu besitzen. Daher untersuchen wir in diesem Blatt Fréchet–differenzierbarkeit auf beliebigen Intervallen und erweitern damit den Raum $C^1(S;X)$, wobei X ein Banachraum ist und $S \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, auf halboffene und abgeschlossene Intervalle.

Definition: (Die klassische Zeitableitung)

Sei $S \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und X ein Banachraum. Eine Funktion $u\colon S \to X$ heißt *klassisch differenzierbar* im Punkt $t \in S$, wenn ein Element $x \in X$ existiert, sodass

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ t+h\in S}} \left\| \frac{u(t+h)-u(t)}{h} - x \right\|_X = 0\,.$$

Wir definieren $u'(t) := x$ und bezeichnen $u'(t) \in X$ als *klassische Zeitableitung* von $u\colon S \to X$ im Punkt $t \in S$. Eine Funktion $u\colon S \to X$ heißt klassisch differenzierbar, falls sie in jedem Punkt $t \in S$ eine klassische Zeitableitung $u'(t) \in X$ besitzt. Wir bezeichnen die resultierende Funktion $u'\colon S \to X$ als klassische Zeitableitung von $u\colon S \to X$. Wir definieren den Raum

$$C^1(S;X) := \left\{ u \in C^0(S;X) \;\middle|\; \exists u' \in C^0(S;X) \right\}. \tag{1}$$

Aufgabe 2 **(3 Punkte)**

Sei $S \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und X ein Banachraum. Zeigen Sie, dass $u\colon S \to X$ im Punkt $t \in S$ genau dann klassisch differenzierbar ist, wenn $u\colon S \to X$ im Punkt $t \in S$ Fréchet–differenzierbar ist.

Bemerkung: Diese Aufgabe zeigt, dass der Begriff der klassischen Zeitableitung eine natürliche Erweiterung der Fréchet–differenzierbarkeit auf beliebige Intervalle ist. Insbesondere rechtfertigt dies, dass wir in (1) dieselbe Notation wie für den Raum der stetig Fréchet–differenzierbaren Funktionen verwenden.

Aufgabe 3 **(3 Punkte)**

Sei $S \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und X ein Banachraum. Zeigen Sie, dass für $u \in C^1(S;X)$ für alle $s, t \in S$ mit $s < t$ gilt, dass $\sup_{\tau \in [s,t]} \|u'(\tau)\|_X < \infty$ und

$$\|u(t) - u(s)\|_X \leq (t-s) \sup_{\tau \in [s,t]} \|u'(\tau)\|_X \, .$$

Tipp: Gehen Sie wie im Beweis von Satz 2.3 der Vorlesung vor.

Aufgabe 4 **(5 Punkte)**

Sei $S \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und X ein Banachraum. Dann ist $C^1(S;X)$, versehen mit der Norm

$$\|u\|_{C^1(S;X)} := \|u\|_{C^0(S;X)} + \|u'\|_{C^0(S;X)}$$

für $u \in C^1(S;X)$, ein Banachraum.

Tipp: Verwenden Sie Aufgabe 2 von Blatt 3 und Aufgabe 3 von diesem Blatt.

Aufgabe 5 **(3 Punkte)**

Sei $-\infty < a < b < \infty$, $X := C^1([a,b]\,;\mathbb{R})$ und $Y := C^0([a,b]\,;\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass $f \colon X \to Y$, definiert durch

$$f(u)(t) := u'(t) \qquad \text{für alle } t \in [a,b]\,,$$

stetig Fréchet–differenzierbar ist.

Bitte werfen Sie Ihre Lösungen bis spätestens 27. November 2023, 10 Uhr in den Briefkasten im Untergeschoss des Matheinstituts.