

Übungsaufgaben – Blatt 7

Aufgabe 1

(4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen gelten:

- (i) Sei $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Mit der kanonischen Identifikation von \mathbb{R}^* mit \mathbb{R} , d.h. mittels des Dualitätsprodukts $\langle x, y \rangle_{\mathbb{R}} := x \cdot y$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$, fassen wir die Funktion A als Abbildung zwischen \mathbb{R} und \mathbb{R}^* auf, d.h. wir betrachten den gleichnamigen Operator $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$, definiert durch $\langle Ax, y \rangle_{\mathbb{R}} := Ax \cdot y$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ genau dann (strikt) monoton im Sinne der nichtlinearen Funktionalanalysis ist, wenn $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (strikt) monoton wachsend im Sinne der Analysis I ist.
- (ii) Sei $1 < p < \infty$ und die Funktion $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$A(s) := \begin{cases} |s|^{p-2}s & s \neq 0, \\ 0 & s = 0, \end{cases} \quad \text{für alle } s \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie mithilfe des Satzes von Browder und Minty, dass für den gleichnamigen Operator $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ und für alle $b \in \mathbb{R}^*$ eine eindeutige Lösung $u \in \mathbb{R}$ der Gleichung $Au = b$ existiert. Die strikte Monotonie ist dabei im Sinne von (i) zu verstehen.

Aufgabe 2

(6 Punkte)

Sei $1 < p < \infty$. Zeigen Sie, dass Konstanten $c, C > 0$ existieren, sodass für alle $\xi, \eta \in \mathbb{R}^d$ mit $|\xi| + |\eta| > 0$ gilt

$$c(|\xi| + |\eta|)^{p-2} \leq \int_0^1 |\xi + \tau(\eta - \xi)|^{p-2} d\tau \leq C(|\xi| + |\eta|)^{p-2}.$$

Tipp: Betrachten Sie die Funktion $L: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$L(\xi, \eta) := \int_0^1 \left(\frac{|\xi| + |\eta|}{|\eta + \tau(\xi - \eta)|} \right)^{2-p} d\tau$$

für alle $\xi, \eta \in \mathbb{R}^d$. Nutzen Sie, dass L auf $\mathbb{S} := \{(\xi, \eta)^T \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \mid |\xi|^2 + |\eta|^2 = 1\}$ stetig ist sowie das Skalierungsverhalten von L , d.h. für welches $\beta \geq 0$ gilt $L(\lambda\xi, \lambda\eta) = \lambda^\beta L(\xi, \eta)$ für alle $(\xi, \eta)^T \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ und $\lambda > 0$?

Aufgabe 3

(4 Punkte)

Seien X, Y Banachräume und $T \in K(X, Y)$, d.h. kompakt und linear. Zeigen Sie, dass $T: X \rightarrow Y$ vollstetig ist.

Aufgabe 4

(6 Punkte)

Sei H ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_H$. Sei weiter $A: H \rightarrow H^*$ ein Lipschitz-stetiger, stark monotoner Operator und $R: H \rightarrow H^*$ der Riesz-Isomorphismus, d.h. $\langle Rh, \tilde{h} \rangle_H := (h, \tilde{h})_H$ für alle $h, \tilde{h} \in H$. Zeigen Sie mithilfe der Abbildung $F_\varepsilon: H \rightarrow H$, definiert durch $F_\varepsilon(h) := h + \varepsilon R^{-1}(h^* - Ah)$ für alle $h \in H$ und geeignete $h^* \in H^*$ und $\varepsilon > 0$, dass $A: H \rightarrow H^*$ bijektiv ist.

Tipp: Verwenden Sie den Banach'schen Fixpunktsatz für geeignetes $\varepsilon > 0$.

Bemerkung: Der Beweis des Satzes von Browder–Minty ist stark nicht-konstruktiv, d.h. er liefert nur bedingt ein numerisches Approximationsverfahren für nichtlineare Probleme. Das lässt sich im Wesentlichen auf zwei benutzte Werkzeuge zurückführen:

- (i) Die Benutzung des Brouwer'schen Fixpunktsatzes, dessen Beweis nicht-konstruktiv ist. Der Brouwer'sche Fixpunktsatz liefert nur die Existenz einer Lösung, trifft aber keine Aussage darüber, wie man diese Lösung explizit bestimmen kann.
- (ii) Die Auswahl einer schwach konvergenten Teilfolge. Es ist nicht klar welche Teilfolge schwach konvergiert.

Wir erinnern uns jedoch daran, dass der Banach'sche Fixpunktsatz einen konstruktiven Beweis besitzt, der uns unmittelbar ein numerisches Approximationsverfahren für nichtlineare Probleme liefert. Deshalb liefert uns Aufgabe 4 im Spezialfall eines Lipschitz-stetigen, stark monotonen Operators zwischen Hilberträumen, einen Existenzsatz mit einem konstruktiven Beweis und damit implizit ein numerisches Approximationsverfahren zur Bestimmung von Lösungen.

Bitte werfen Sie Ihre Lösungen bis spätestens 04. Dezember 2023, 10 Uhr in den Briefkasten im Untergeschoss des Matheinstituts.