Übungsaufgaben – Blatt 8

Aufgabe 1 **(6 Punkte)**

Sei X ein separabler, reflexiver Banachraum und sei $A\colon X \to X^*$ ein strikt monotoner, koerziver, hemistetiger Operator. Zeigen Sie, dass der Operator $A^{-1}\colon X^* \to X$ existiert, strikt monoton, beschränkt und demistetig ist. Dabei nennen wir einen Operator $B\colon X^* \to X$ strikt monoton, falls

$$\langle x^* - y^*, Bx^* - By^* \rangle_X > 0$$

für alle $x^*, y^* \in X^*$ mit $x^* \neq y^*$.

Bemerkung: In der Vorlesung (Beginn von Kapitel 3) wurde bereits erwähnt, dass der Satz von Browder–Minty eine Verallgemeinerung des Zwischensatzes für stetige Funktionen ist. Wir erinnern uns daran, dass eine stetige, strikt monoton wachsende und surjektive Funktion $f\colon I \to J$, wobei $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle sind, ein stetige, strikt monoton wachsende Umkehrfunktion $f^{-1}\colon J \to I$ besitzt. Die Aufgabe 1 zeigt daher, dass sich auch diese Aussage verallgemeinern lässt.

Aufgabe 2 **(8 Punkte)**

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, ein beschränktes Gebiet und $p \in (1, \infty)$. Wir definieren den Raum $X \coloneqq W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ und versehen ihn mit der Norm $\|\cdot\|_X \coloneqq \|\cdot\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$. Sei weiter für ein festes $s > 0$ der Operator $A\colon X \to X^*$ definiert durch

$$\langle Au, v \rangle_X \coloneqq \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v + suv \,\mathrm{d}x$$

für alle $u, v \in X$. Zeigen Sie, die folgenden Aussagen:

- **(i)** X ist separabel und reflexiv.
- **(ii)** $A\colon X \to X^*$ ist wohldefiniert und stetig.
- **(iii)** $A\colon X \to X^*$ ist strikt monoton.
- **(iv)** $A\colon X \to X^*$ ist koerziv.
- **(v)** $A\colon X \to X^*$ ist bijektiv.

Bemerkung: Aufgabe 2 beweist Bemerkung 1.40 (i) aus der Vorlesung.

Aufgabe 3 **(6 Punkte)**

Sei X ein reflexiver, separabler Banachraum und $B\colon X \times X \to X^*$ genüge den folgenden Bedingungen:

- **(i)** $B(x, \cdot)\colon X \to X^*$ ist für alle festen $x \in X$ monoton und hemistetig.
- **(ii)** $B(\cdot, y)\colon X \to X^*$ ist für alle festen $y \in X$ schwach stetig.
- **(iii)** $(x \mapsto \langle B(x, y), x \rangle_X)\colon X \to \mathbb{R}$ ist für alle festen $y \in X$ schwach unterhalbstetig, d.h. $x_n \rightharpoonup x$ in X $(n \to \infty)$ impliziert $\langle B(x, y), x \rangle_X \leq \liminf_{n\to\infty} \langle B(x_n, y), x_n \rangle_X$.

Zeigen Sie, dass der Operator $A\colon X \to X^*$, definiert durch $Ax \coloneqq B(x, x)$ in X^* für alle $x \in X$, pseudo-monoton ist. Gehen Sie dabei in zwei Schritten vor:

1. Zeigen Sie, mit **(i)–(iii)** und den Methoden des Beweises von Lemma 2.6 (i), dass für eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ aus

$$x_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} x \quad \text{in } X, \qquad \limsup_{n\to\infty} \langle Ax_n, x_n - x\rangle_X \leq 0\,, \tag{1}$$

folgt, dass $\liminf_{n\to\infty} \langle Ax_n, x - y\rangle_X \geq \langle Ax, x - y\rangle_X$ für alle $y \in X$.
Tipp: Betrachten Sie für $y \in X$ und $\varepsilon \in (0,1)$ das Element $x_\varepsilon := (1-\varepsilon)x + \varepsilon y \in X$ und nutzen Sie, dass aufgrund von **(i)** für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\langle B(x_n, x_n) - B(x_n, x_\varepsilon), x_n - x_\varepsilon\rangle_X \geq 0\,.$$

2. Folgern Sie aus **1.** unter Verwendung von **(i)–(iii)**, dass für eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ aus (1) folgt, dass $\liminf_{n\to\infty} \langle Ax_n, x_n - y\rangle_X \geq \langle Ax, x - y\rangle_X$ für alle $y \in X$.