Übungsaufgaben – Blatt 9

Aufgabe 1 (p-Laplace-Problem mit inhomogenen Randdaten) **(5 Punkte)**

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, ein beschränktes Gebiet und $p \in (1, \infty)$. Zeigen Sie, dass für beliebige $f \in L^{p'}(\Omega)$ und $g \in W^{1,p}(\Omega)$ eine eindeutige schwache Lösung des Problems

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) &= f \quad \text{in } \Omega\,, \\ u &= g \quad \text{auf } \partial\Omega\,, \end{aligned}$$

existiert, d.h. dass es genau ein $u \in W^{1,p}(\Omega)$ gibt, sodass $u - g \in W_0^{1,p}(\Omega)$ und

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx \quad \text{für alle } v \in W_0^{1,p}(\Omega)\,. \tag{1}$$

Tipp: Bezeichne $A\colon W^{1,p}(\Omega) \to (W_0^{1,p}(\Omega))^*$ den Operator, der durch die linke Seite in (1) definiert ist. Betrachten Sie den Operator $A_g\colon W_0^{1,p}(\Omega) \to (W_0^{1,p}(\Omega))^*$, definiert durch $A_g u := A(u+g)$ in $(W_0^{1,p}(\Omega))^*$ für alle $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Aufgabe 2 (p-Laplace-Problem mit Divergenz-Nebenbedingung) **(5 Punkte)**

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und $p \in (1, d)$. Seien weiter $g_i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, d$, stetige Funktionen, die den Bedingungen (2.17) für $r < p^* = \frac{dp}{d-p}$ und (2.23) der Vorlesung genügen. Wir definieren die Abbildung $\mathbf{g} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ durch $\mathbf{g}(\mathbf{a}) := \sum_{i=1}^d g(\mathrm{a}_i)\mathbf{e}_i$ für alle $\mathbf{a} := (\mathrm{a}_1, \dots, \mathrm{a}_d)^\top \in \mathbb{R}^d$, wobei $\mathbf{e}_i \in \mathbb{S}^{d-1}$ den i-ten Einheitsvektor bezeichnet. Zeigen Sie, dass für beliebiges $\mathbf{f} \in L^{p'}(\Omega)^d$ eine schwache Lösung des Problems

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}(|\nabla \mathbf{u}|^{p-2}\nabla \mathbf{u}) + \mathbf{g}(\mathbf{u}) &= \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega\,, \\ \mathrm{div}\, \mathbf{u} &= 0 \quad \text{in } \Omega\,, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0} \quad \text{auf } \partial\Omega\,, \end{aligned}$$

existiert, d.h. dass es ein $\mathbf{u} \in V_p := \{\mathbf{u} \in W_0^{1,p}(\Omega)^d \mid \mathrm{div}\, \mathbf{u} = 0\}$ gibt, sodass

$$\int_\Omega |\nabla \mathbf{u}|^{p-2}\nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} + \mathbf{g}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \, dx = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx \quad \text{für alle } \mathbf{v} \in V_p\,.$$

Dabei versehen wir den Raum V_p mit der Gradientennorm $\|\cdot\|_{V_p} := \|\nabla \cdot\|_{L^p(\Omega)^{d\times d}}$.

Tipp: Verwenden Sie Lemma 2.16 von Kapitel 3.

Aufgabe 3 **(5 Punkte)**

Sei V ein reflexiver Banachraum, H ein Hilbertraum und $j\colon V \to H$ eine dichte Einbettung, d.h. j ist stetig, injektiv und $R(j)$ liegt dicht in H. Bezeichne weiter $R\colon H \to H^*$ der Riesz-Isomorphismus bezüglich H. Zeigen Sie, dass die kanonische Einbettung $e := j^* \circ R \circ j\colon V \to V^*$ ebenfalls ein dichte Einbettung ist.

Bemerkung: Diese Aufgabe zeigt insbesondere, dass im Falle eines reflexiven Banachraums V, die Adjungierte $j^*\colon H^* \to V^*$ immer eine dichte Einbettung ist.

Aufgabe 4 **(5 Punkte)**

Sei (V, H, j) ein Gelfand-Tripel, $I := (0, T)$, $T < \infty$, und $p \in (1, \infty)$. Seien weiter $u \in L^p(I; V)$ und $w \in L^{p'}(I; V^*)$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $u \in L^p(I; V)$ besitzt die verallgemeinerte Zeitableitung $\frac{\mathrm{d}_e u}{\mathrm{d}t} = w \in L^{p'}(I; V^*)$ im Sinne von Definition 2.39 des Kapitels 3.

(ii) Die Ableitung der Distribution $T_{eu} \in \mathcal{D}'(I, V^*)$ (cf. Kapitel 3, Bemerkung 2.40 (i)) erfüllt $(T_{eu})' = T_w$ in $\mathcal{D}'(I, V^*)$. Dabei ist $\boldsymbol{e} \colon L^p(I, V) \to L^{p'}(I, V^*)$ die durch die kanonische Einbettung $e \colon V \to V^*$ induzierte Einbettung von Kapitel 3, Bemerkung 2.40 (ii).