Übungsaufgaben – Blatt 10

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Sei (V, H, j) ein Gelfand-Tripel, $I := (0, T)$, $0 < T < \infty$, und $p \in (1, \infty)$. Seien weiter $v \in V$ und $\varphi \in C^1(\overline{I})$. Zeigen Sie, dass für die Funktion $u \in L^p(I; V)$, definiert durch $u(t) := v\varphi(t)$ in V für fast alle $t \in I$, gilt, dass $u \in W^{1,p,p'}(I; V, V^*)$ mit

$$\frac{\mathrm{d}_e u}{\mathrm{d}t} = \varphi' e(v) \quad \text{in } L^{p'}(I; V^*).$$

wobei $e\colon \to V^*$ die kanonische Einbettung zu (V, H, j) ist.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, ein beschränktes Lipschitz–Gebiet, $I := (0, T)$, $T < \infty$, und $s > 0$. Sei weiter der Operator $\boldsymbol{\mathcal{A}}\colon L^2(I; W_0^{1,2}(\Omega)) \to (L^2(I; W_0^{1,2}(\Omega)))^*$ definiert durch

$$\langle \boldsymbol{\mathcal{A}} u, v\rangle_{L^2(I;W_0^{1,2}(\Omega))} := \int_I \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v - suv \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

für alle $u, v \in L^2(I; W_0^{1,2}(\Omega))$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen gelten:

(i) $\boldsymbol{\mathcal{A}}\colon L^2(I; W_0^{1,2}(\Omega)) \to (L^2(I; W_0^{1,2}(\Omega)))^*$ ist wohldefiniert und beschränkt.

(ii) Die Einschränkung $\boldsymbol{\mathcal{A}}\colon L^2(I; W_0^{1,2}(\Omega)) \cap L^\infty(I; L^2(\Omega)) \to (L^2(I; W_0^{1,2}(\Omega)))^*$ ist Bochner-pseudomonoton und Bochner-koerziv.

(iii) Für ein hinreichend großes $s > 0$ ist $\boldsymbol{\mathcal{A}}\colon L^2(I; W_0^{1,2}(\Omega)) \to (L^2(I; W_0^{1,2}(\Omega)))^*$ nicht koerziv.

Tipp: Zeigen Sie, dass für hinreichend großes $s > 0$ eine Funktion $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ existiert, sodass $\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^d}^2 - s\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 < 0$ gilt, und betrachten Sie dann die Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^2(I; W_0^{1,2}(\Omega))$, definiert durch $u_n(t, x) := f_n(t)v(x)$ für alle $(t, x)^\top \in I \times \Omega$ und $n \in \mathbb{N}$, wobei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^2(I)$ mit $\|f_n\|_{L^2(I)} \to \infty$ $(n \to \infty)$.

(iv) Für ein hinreichend großes $s > 0$ folgt für $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^2(I; W_0^{1,2}(\Omega)) \cap L^\infty(I; L^2(\Omega))$ und $u \in L^2(I; W_0^{1,2}(\Omega)) \cap L^\infty(I; L^2(\Omega))$ aus

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u && \text{in } L^2(I; W_0^{1,2}(\Omega)) \quad (n \to \infty)\,, \\ u_n &\overset{*}{\rightharpoonup} u && \text{in } L^\infty(I; L^2(\Omega)) \quad (n \to \infty)\,, \\ \limsup_{n\to\infty} \langle \boldsymbol{\mathcal{A}} u_n&, u_n - u\rangle_{L^2(I;W_0^{1,2}(\Omega))} \leq 0\,, \end{aligned}$$

im Allgemeinen nicht, dass

$$\langle \boldsymbol{\mathcal{A}} u, u - v\rangle_{L^2(I;W_0^{1,2}(\Omega))} \leq \liminf_{n\to\infty} \langle \boldsymbol{\mathcal{A}} u_n, u_n - v\rangle_{L^2(I;W_0^{1,2}(\Omega))}$$

für alle $v \in L^2(I; W_0^{1,2}(\Omega))$. Insbesondere ist $\boldsymbol{\mathcal{A}}\colon L^2(I; W_0^{1,2}(\Omega)) \to (L^2(I; W_0^{1,2}(\Omega)))^*$ nicht pseudomonoton.

Tipp: Betrachten Sie $I := (0, 2\pi)$ und $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^2(I; W_0^{1,2}(\Omega)) \cap L^\infty(I; L^2(\Omega))$, definiert durch $u_n(t, x) := f_n(t)v(x)$ für alle $(t, x)^\top \in I \times \Omega$, wobei $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ so wie im Tipp zu **(iii)** gewählt ist und $f_n(t) := \sin(nt)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $t \in I$. Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $f_n \rightharpoonup 0$ in $L^2(I)$ $(n \to \infty)$ und $\|f_n\|_{L^2(I)}^2 \to \pi$ in $(n \to \infty)$.

Bemerkung: Diese Aufgabe soll unterstreichen, dass die Begriffe Pseudomonotonie und Koerzivität für die Behandlung instationärer Probleme ungeeignet sind, d.h. von vielen instationären Operatoren nicht erfüllt werden, wohingegen die Begriffe Bochner-Pseudomonotonie und Bochner-Koerzivität genau an die Beschaffenheiten instationärer Probleme angepasst sind, d.h. Informationen, die von der Zeitableitung stammen wie die $*$–schwache Konvergenz in $L^\infty(I;L^2(\Omega))$ und die fast überall schwache Konvergenz in $L^2(\Omega)$, berücksichtigen.

Aufgabe 3 **(8 Punkte)**

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Lipschitz–Gebiet und $I := (0, 2\pi)$. Wir definieren weiter $V_2 := \{\mathbf{v} \in W_0^{1,2}(\Omega)^2 \mid \operatorname{div}\mathbf{v} = 0\}$ und H als den Abschluss von V_2 in $L^2(\Omega)^2$. Zeigen Sie, dass der **instationäre konvektive Term** $\boldsymbol{\mathcal{C}}\colon L^2(I;V_2) \cap L^\infty(I;H) \to (L^2(I;V_2))^*$, definiert durch

$$\langle \boldsymbol{\mathcal{C}}\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_{L^2(I;V_2)} := -\int_I \int_\Omega \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} : \nabla\mathbf{v} \,dx\,dt$$

für alle $\mathbf{u} \in L^2(I;V_2) \cap L^\infty(I;H)$ und $\mathbf{v} \in L^2(I;V_2)$, wohldefiniert und beschränkt ist, aber für $(\mathbf{u}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^2(I;V_2) \cap L^\infty(I;H)$ und $\mathbf{u} \in L^2(I;V_2) \cap L^\infty(I;H)$ aus

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_n &\rightharpoonup \mathbf{u} && \text{in } L^2(I;V_2) \quad (n \to \infty)\,, \\ \mathbf{u}_n &\overset{*}{\rightharpoonup} \mathbf{u} && \text{in } L^\infty(I;H) \quad (n \to \infty)\,, \\ \limsup_{n\to\infty} \langle \boldsymbol{\mathcal{C}}\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n - \mathbf{u}\rangle_{L^2(I;V_2)} &\leq 0\,, \end{aligned}$$

im Allgemeinen nicht folgt, dass $\langle \boldsymbol{\mathcal{C}}\mathbf{u}, \mathbf{u} - \mathbf{w}\rangle_{L^2(I;V_2)} \leq \liminf_{n\to\infty} \langle \boldsymbol{\mathcal{C}}\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n - \mathbf{w}\rangle_{L^2(I;V_2)}$ für alle $\mathbf{w} \in L^2(I;V_2)$.

Tipp: Sie dürfen für die Wohldefiniertheit und Beschränktheit ohne Beweis verwenden, dass eine Konstante $c_2 > 0$ existiert, sodass für alle $\mathbf{u} \in V_2$ die zwei dimensionale **Ladyžhenskaya–Ungleichung**

$$\|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)^2}^4 \leq c_2 \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)^{2\times 2}}^2$$

gilt. Für das Gegenbeispiel betrachten Sie die Folge $(\mathbf{u}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^2(I;V_2) \cap L^\infty(I;H)$, definiert durch $\mathbf{u}_n(t,x) := f_n(t)\mathbf{v}(x)$ für alle $(t,x)^\top \in I \times \Omega$ und $n \in \mathbb{N}$, wobei $\mathbf{v} \in V_2$ so gewählt ist, dass $\int_\Omega \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} : \nabla\mathbf{w}\,dx < 0$ für ein $\mathbf{w} \in V_2$, und $f_n(t) := \sin(nt)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $t \in I$. Begründen Sie warum solche $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V_2$ existieren.

Bemerkung: Der instationäre konvektive Term $\boldsymbol{\mathcal{C}}\colon L^2(I;V_2) \cap L^\infty(I;H) \to (L^2(I;V_2))^*$ ist wahrscheinlich das berühmteste Beispiel eines instationären Operators, der nicht pseudomonoton ist. Bezeichne $C\colon {}_2 \to V_2^*$, definiert durch

$$\langle C\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_{V_2} := -\int_\Omega \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} : \nabla\mathbf{v}\,dx = \int_\Omega [\nabla\mathbf{u}]\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\,dx$$

für alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_2$, den stationären konvektiven Term $C\colon {}_2 \to V_2^*$ in zwei Dimensionen. Wie in Kapitel 3, Lemma 2.33, kann man zeigen, dass auch $C\colon {}_2 \to V_2^*$ wohldefiniert, beschränkt, vollstetig und damit pseudomonoton ist. Der konvektive Term $C\colon {}_2 \to V_2^*$ ist also ein weiteres Beispiel eines pseudomonotonen Operators, der einen nicht pseudomonotonen instationären Operator induziert. Man kann jedoch zeigen, dass $\boldsymbol{\mathcal{C}}\colon L^2(I;V_2) \cap L^\infty(I;H) \to (L^2(I;V_2))^*$ Bochner-pseudomonoton ist.

Bitte werfen Sie Ihre Lösungen bis spätestens 8. Januar 2023, 10 Uhr in den Briefkasten im Untergeschoss des Matheinstituts.