Übungsaufgaben – Blatt 11

Aufgabe 1 **(10 Punkte)**

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und $p \in \big(\frac{2d}{d+2}, \infty\big)$. Seien weiter $g_i \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, d$, stetige Funktionen, die den Bedingungen (2.17) für $r < r_0 := p\frac{d+2}{d}$ und (2.23) der Vorlesung genügen. Wir definieren die Abbildung $\mathbf{g} \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ durch $\mathbf{g}(\mathbf{a}) := \sum_{i=1}^d g_i(\mathrm{a}_i)\mathbf{e}_i$ für alle $\mathbf{a} := (\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_d)^\top \in \mathbb{R}^d$, wobei $\mathbf{e}_i \in \mathbb{S}^{d-1}$ den i-ten Einheitsvektor bezeichnet. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen gelten:

(i) $(V_p, H, \mathrm{id}_{V_p})$, wobei $V_p := \{\mathbf{u} \in W_0^{1,p}(\Omega)^d \mid \operatorname{div} \mathbf{u} = 0\}$ mit der Norm $\|\cdot\|_{V_p} := \|\nabla \cdot\|_{L^p(\Omega)^{d\times d}}$ ausgestattet ist und H der Abschluss von V_p bezüglich des $L^2(\Omega)^d$-Skalarproduktes, bildet ein Gelfand-Tripel.

(ii) Zu beliebigen $\mathbf{f} \in L^{p'}(I; V_p^*)$ und $\mathbf{u}_0 \in H$ existiert ein $\mathbf{u} \in W^{1,p,p'}(I; V_p, V_p^*)$ mit einem Repräsentanten $\mathbf{u}_c \in C^0(\overline{I}; H)$, sodass $\mathbf{u}_c(0) = \mathbf{u}_0$ in H und für alle $\mathbf{v} \in L^p(I; V_p)$ gilt

$$\int_I \left\langle \frac{\mathrm{d}_e \mathbf{u}}{\mathrm{d}t}(t), \mathbf{v}(t) \right\rangle_{V_p} \mathrm{d}t + \int_I \int_\Omega |\nabla \mathbf{u}|^{p-2} \nabla \mathbf{u} \colon \nabla \mathbf{v} + \mathbf{g}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t = \int_I \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{v}(t) \rangle_{V_p} \,\mathrm{d}t\,,$$

wobei $e \colon V_p \to V_p^*$ die kanonische Einbettung zu $(V_p, H, \mathrm{id}_{V_p})$ bezeichnet.

(iii) Falls ein $\mu \geq 0$ existiert, sodass

$$(\mathbf{g}(\mathbf{a}) - \mathbf{g}(\mathbf{b})) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \geq -\mu |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 \qquad \text{für alle } \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^d\,,$$

dann ist die Lösung $\mathbf{u} \in W^{1,p,p'}(I; V_p, V_p^*)$ in Aufgabenteil (ii) eindeutig.

Aufgabe 2 **(10 Punkte)**

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet und $I := (0, T)$, $0 < T < \infty$. Zeigen Sie, dass zu beliebigen $\mathbf{f} \in L^2(I; V_2^*)$ und $\mathbf{u}_0 \in H$ ein eindeutiges $\mathbf{u} \in W^{1,2,2}(I; V_2, V_2^*)$ mit einem Repräsentanten $\mathbf{u}_c \in C^0(\overline{I}; H)$ existiert, sodass $\mathbf{u}_c(0) = \mathbf{u}_0$ in H und für alle $\mathbf{v} \in L^2(I; V_2)$ gilt

$$\int_I \left\langle \frac{\mathrm{d}_e \mathbf{u}}{\mathrm{d}t}(t), \mathbf{v}(t) \right\rangle_{V_2} \mathrm{d}t + \int_I \int_\Omega \big[\nabla \mathbf{u} - \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}\big] \colon \nabla \mathbf{v} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t = \int_I \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{v}(t) \rangle_{V_2} \,\mathrm{d}t\,,$$

wobei $e \colon V_2 \to V_2^*$ die kanonische Einbettung zu $(V_2, H, \mathrm{id}_{V_2})$ bezeichnet.

Tipp: Nutzen Sie für die Eindeutigkeit die Ladyžhenskaya–Ungleichung aus dem Tipp von Aufgabe 3 von Blatt 10.

Bitte werfen Sie Ihre Lösungen bis spätestens 15. Januar 2023, 10 Uhr in den Briefkasten im Untergeschoss des Matheinstituts.