# Übungsaufgaben – Blatt 12

## Aufgabe 1 (Wortherkunft von Maximalmonotonie) (5 Punkte)

Sei $X$ ein reflexiver Banachraum und $A\colon M \subseteq X \to 2^{X^*}$ eine monotone Abbildung. Zeigen Sie, dass $A\colon M \subseteq X \to 2^{X^*}$ genau dann maximal monoton ist, wenn es keine echte monotone Erweiterung gibt, d.h. für alle monotonen Abbildungen $\overline{A}\colon M \subseteq X \to 2^{X^*}$ mit $G(\overline{A}) \supseteq G(A)$ bereits folgt, dass $G(\overline{A}) = G(A)$.

## Aufgabe 2 (Lineare maximal monotone Operatoren) (3 Punkte)

Sei $X$ ein reflexiver Banachraum und $A\colon X \to X^*$ ein linearer Operator. Zeigen Sie, dass $A\colon X \to X^*$ genau dann maximal monoton ist, wenn $A$ positiv semidefinit ist, d.h. $\langle Ax, x\rangle_X \geq 0$ für alle $x \in X$.

## Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $X$ ein reflexiver Banachraum, $C \subseteq X$ nicht-leer, abgeschlossen und konvex und $Y \subseteq X$ ein endlich-dimensionaler Unterraum. Es sei der Operator $A\colon C \to 2^{X^*}$ maximal monoton, $B\colon C \to X^*$ pseudo-monoton, beschränkt und demi-stetig und $\mathrm{id}_Y : Y \to X$ Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen gelten:

**(i)** $A_Y\colon C \cap Y \to 2^{Y^*}$, definiert durch $(u, u^*)^\top \in A_Y$ genau dann, wenn ein $v^* \in Au$ existiert, sodass $u^* = (\mathrm{id}_Y)^* v^*$ in $Y^*$, ist maximal monoton.

**(ii)** $B_Y := (\mathrm{id}_Y)^* B\colon C \cap Y \to Y^*$ ist pseudo-monoton, beschränkt und demi-stetig.

## Aufgabe 4 (Verallgemeinerte Zeitableitung als maximal monotoner Operator) (8 Punkte)

Sei $(V, H, j)$ ein Gelfand–Tripel, sodass $V$ separabel und reflexiv ist, $I := (0, T)$, $0 < T < \infty$, und $p \in (1, \infty)$. Zeigen Sie, dass der Operator

$$
\begin{aligned}
L := R \circ \frac{\mathrm{d}_e}{\mathrm{d}t}\colon D(L) \subseteq L^p(I; V) \to (L^p(I; V))^*,\\
D(L) := \big\{u \in W^{1,p,p'}(I; V, V^*) \mid (\boldsymbol{j}_c u)(0) = 0\big\},
\end{aligned}
$$

ein maximal monotoner Operator im Sinne von Kapitel 3, Bemerkung 3.4 (iii) ist, wobei $\frac{\mathrm{d}_e}{\mathrm{d}t}\colon W^{1,p,p'}(I; V, V^*) \subseteq L^p(I; V) \to L^{p'}(I; V^*)$ die verallgemeinerte Zeitableitung im Sinne von Kapitel 3, Definition 2.39, und $R : L^{p'}(I; V^*) \to (L^p(I; V))^*$ den Riesz–Isomorphismus im Sinne von Kapitel 2, Satz 1.30, bezeichnet.

Bitte werfen Sie Ihre Lösungen bis spätestens 22. Januar 2023, 10 Uhr in den Briefkasten im Untergeschoss des Matheinstituts.