Prof. Dr. Michael Růžička, M. Sc. Mirjam Hoferichter 22. Januar 2023

Übungsaufgaben – Blatt 13

Aufgabe 1 (Maximal monoton $\Leftrightarrow$ *-demistetig in separablen Banachraum) (5 Punkte)

Sei X ein separabler Banachraum und $A\colon X \to X^*$ ein monotoner Operator. Zeigen Sie, dass $A\colon X \to X^*$ genau dann maximal monoton ist, wenn $A\colon X \to X^*$ *-demistetig ist, d.h. für eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ aus $x_n \to x$ in X $(n \to \infty)$ folgt, dass $Ax_n \overset{*}{\rightharpoonup} Ax$ in X^* $(n \to \infty)$.

Tipp: Gehen Sie analog zum Beweis von Kapitel 3, Lemma 3.5, vor, aber verwenden Sie nun den Satz von Banach–Alaoglu.

Bemerkung: In der Vorlesung haben wir den Begriff der Maximalmonotonie nur für reflexive Banachräume eingeführt. Dieser Begriff lässt sich aber auch analog für allgemeine Banachräume definieren. Insbesondere beweist diese Aufgabe die Bemerkung (ii) nach Kapitel 3, Lemma 3.5.

Aufgabe 2 (Konjugierte Funktion & Subdifferential) (7 Punkte)

Sei X ein Banachraum und $f\colon X \to (-\infty, \infty]$ mit $\operatorname{dom}(f) := \{x \in X \mid f(x) < \infty\} \neq \emptyset$. Die konjugierte Funktion $f^*\colon X^* \to (-\infty, \infty]$ ist für alle $x^* \in X^*$ definiert durch

$$f^*(x^*) := \sup_{x\in X} \langle x^*, x\rangle_X - f(x)\,.$$

Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

(i) Für alle $x \in \operatorname{dom}(f)$ und alle $x^* \in X^*$ gilt die Young'sche Ungleichung

$$\langle x^*, x\rangle_X \le f^*(x^*) + f(x)\,.$$

Dabei gilt Gleichheit genau dann, wenn $x^* \in \partial f(x)$.

(ii) Für $x \in X$ gilt $f(x) = \min_{y\in X} f(y)$ genau dann, wenn $f(x) = -f^*(0)$, d.h. $-f^*(0)$ ist ein globales Minimum von f.

(iii) Aus $x \in \operatorname{dom}(f)$ und $x^* \in \partial f(x)$ folgt $x^* \in \operatorname{dom}(f^*)$ und $J_X x \in \partial f^*(x^*)$, wobei $J_X\colon X \to X^{**}$ die kanonische Isometrie ist.

(iv) Sei $1 < p < \infty$. Zeigen Sie, dass für $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) := \frac{1}{p}|x|^p$ für alle $x \in \mathbb{R}$, die konjugierte Funktion $f^*\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f^*(x^*) = \frac{1}{p'}|x^*|^{p'}$ für alle $x^* \in \mathbb{R}$ gegeben ist.

Tipp: Nehmen Sie (ohne dies zu beweisen) an, dass für alle $x^* \in \mathbb{R}$ das Supremum in der Definition von $f^*(x^*)$ in einem Punkt $x \in \mathbb{R}$ angenommen wird.

Aufgabe 3 (Existenzsatz für nicht-induzierte Operatoren) (8 Punkte)

Sei (V, H, j) ein Gelfand–Tripel, sodass V separabel und reflexiv ist, $I := (0, T)$, $0 < T < \infty$, und $p \in (1, \infty)$. Sei weiter $\boldsymbol{\mathcal{A}}\colon L^p(I; V) \to (L^p(I; V))^*$ beschränkt, koerziv und pseudomonoton. Zeigen Sie, dass zu beliebigem $f \in L^{p'}(I; V^*)$ ein $u \in W^{1,p,p'}(I; V, V^*)$ existiert, sodass $(\boldsymbol{j}_c u)(0) = 0$ in H und für alle $\varphi \in L^p(I; V)$ gilt

$$\int_I \left\langle \frac{\mathrm{d}_e u}{\mathrm{d}t}(t), \varphi(t)\right\rangle_V \mathrm{d}t + \langle \boldsymbol{\mathcal{A}} u, \varphi\rangle_{L^p(I;V)} = \int_I \langle f(t), \varphi(t)\rangle_V \,\mathrm{d}t.$$

Tipp: Greifen Sie in der Vorlesung voraus und verwenden Sie den Satz von Browder, d.h. Satz 3.33 aus Kapitel 3. Genauer verwenden Sie Folgerung 3.48 aus Kapitel 3.

Bemerkung: In der Vorlesung haben wir nur Existenzsätze für induzierte Operatoren, d.h. Operatoren $\boldsymbol{\mathcal{A}}\colon L^p(I;V) \to (L^p(I;V))^*$, die durch einen Operator $A\colon V \to V^*$ im Sinne von (2.48) vorgeschrieben sind, bewiesen. Diese Aufgabe liefert nun zusätzlich einen Existenzsatz für nicht-induzierte Operatoren. Man kann sogar zeigen, dass die Aussage dieser Aufgabe wahr bleibt, falls $\boldsymbol{\mathcal{A}}\colon L^p(I;V) \cap L^\infty(I;H) \to (L^p(I;V))^*$ beschränkt, Bochner-koerziv und Bochner-pseudomonoton.

Bitte werfen Sie Ihre Lösungen bis spätestens 29. Januar 2023, 10 Uhr in den Briefkasten im Untergeschoss des Matheinstituts.