Übungsaufgaben – Blatt 14

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, offen und beschränkt. Zeigen Sie, dass

$$d(-\mathbf{id}_{\mathbb{R}^n}, \Omega, \mathbf{p}) = \begin{cases} 0 & \text{falls } -\mathbf{p} \notin \overline{\Omega}\,, \\ (-1)^n & \text{falls } -\mathbf{p} \in \Omega\,. \end{cases}$$

Aufgabe 2 (Translations- und Homotopieinvarianz) (5 Punkte)

Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, offen und beschränkt. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen gelten:

(i) Der Abbildungsgrad von Brouwer ist translationsinvariant, d.h. für $\mathbf{f} \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n) \cap C^0(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ und $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbf{f}(\partial\Omega)$ derart, dass $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{p})$ nur reguläre Punkte enthält, gilt:

$$d(\mathbf{f}, \Omega, \mathbf{p}) = d(\mathbf{f} - \mathbf{p}, \Omega, \mathbf{0})\,.$$

(ii) Der Abbildungsgrad von Brouwer ist homotopieinvariant, d.h. für $\mathbf{h} \in C^0([0,1] \times \overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ mit $\mathbf{h}(t, \cdot) \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ für alle $t \in [0,1]$ und $\mathbf{p} \in C^0([0,1]; \mathbb{R}^n)$ derart, dass $\mathbf{p}(t) \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbf{h}(t, \partial\Omega)$ für alle $t \in [0,1]$ und $(\mathbf{h}(t,\cdot))^{-1}(\mathbf{p}(t))$ für alle $t \in [0,1]$ nur reguläre Punkte enthält, gilt:

$$d(\mathbf{h}(0,\cdot), \Omega, \mathbf{p}(0)) = d(\mathbf{h}(1,\cdot), \Omega, \mathbf{p}(1))\,.$$

Aufgabe 3 (Zwischenwertsatz) (5 Punkte)

Sei $-\infty < a < b < \infty$ und $f \in C^1((a,b)) \cap C^0([a,b])$ derart, dass $0 \in \mathbb{R} \setminus f(\{a,b\})$ und $f^{-1}(0)$ nur reguläre Punkte enthält.

Zeigen Sie, dass

$$d(f, (a,b), 0) = \begin{cases} 1 & \text{falls } f(b) > 0 > f(a)\,, \\ -1 & \text{falls } f(b) < 0 < f(a)\,. \end{cases}$$

Aufgabe 4 (Abhängigkeit des Abbildungsgrads nur von Randwerten) (5 Punkte)

Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, offen und beschränkt, $\mathbf{f} \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n) \cap C^0(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ und $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbf{f}(\partial\Omega)$ derart, dass $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{p})$ nur reguläre Punkte enthält.

Zeigen Sie, dass $d(\mathbf{f}, \Omega, \mathbf{p})$ nur von $\mathbf{f}|_{\partial\Omega}$ abhängt, d.h. für alle $\mathbf{g} \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n) \cap C^0(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ derart, dass $\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{p})$ nur reguläre Punkte enthält gilt, dass $d(\mathbf{f}, \Omega, \mathbf{p}) = d(\mathbf{g}, \Omega, \mathbf{p})$.

Tipp: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass für $\mathbf{h} \in C^0([0,1] \times \overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ mit $\mathbf{h}(t, \cdot) \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ für alle $t \in [0,1]$ und $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ derart, dass $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbf{h}(t, \partial\Omega)$ für alle $t \in [0,1]$ und $(\mathbf{h}(t,\cdot))^{-1}(\mathbf{p}(t))$ für $t \in \{0,1\}$ nur reguläre Punkte enthält, gilt:

$$d(\mathbf{h}(0,\cdot), \Omega, \mathbf{p}) = d(\mathbf{h}(1,\cdot), \Omega, \mathbf{p})\,.$$

Bitte werfen Sie Ihre Lösungen bis spätestens 5. Februar 2024, 10 Uhr in den Briefkasten im Untergeschoss des Matheinstituts.