Abteilung für
Angewandte Mathematik

Dr. Alexei Gazca, Tatjana Stiefken 16. Oktober 2023

Numerik I

WiSe 2023/2024 — Blatt 1

`https://aam.uni-freiburg.de/agru/lehre/ws23/num/index.html`

Abgabe: 3.11.2023, 10:00 Uhr.

Aufgabe 1 (1+1 Punkte)

Zeigen Sie, dass die folgende Probleme gut konditioniert sind:

(a) Die Addition zweier nichtnegativer oder nichtpositiver Zahlen.

(b) Die Inversion einer von Null verschiedenen Zahl.

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Ein Rechner arbeite mit 10^9 Gleitkommaoperationen pro Sekunde und es seien drei Algorithmen mit Aufwand $\mathcal{O}(n)$, $\mathcal{O}(n^3)$ bzw. $\mathcal{O}(n!)$ zur Lösung derselben Aufgabe gegeben. Wieviele Sekunden, Stunden, Tage oder Jahre benötigen die Algorithmen etwa für die Problemgrößen $n = 10^k$ mit $k \in \{1, \ldots, 6\}$?

Aufgabe 3 (1+2+1 Punkte)

Zu fixierten Normen $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$ und auf $\mathbb{R}^m$, bezeichne $\|\cdot\|_{op}$ die induzierte Operatornorm auf $\mathbb{R}^{m\times n}$. Beweisen Sie:

(a) Die Operatornorm $\|\cdot\|_{op}$ definiert eine Norm auf $\mathbb{R}^{m\times n}$.

(b) Es gilt
$$\|A\|_{op} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \inf\{c > 0 \,:\, \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|Ax\| \le c\,\|x\|\},$$
und das Supremum und das Infimum werden angenommen.

(c) Im Fall $A \neq 0$ folgt für $x \in \mathbb{R}^m$ mit $\|x\| \le 1$ und $\|Ax\| = \|A\|_{op}$ bereits $\|x\| = 1$.

Aufgabe 4 (2+2 Punkte)

Für $1 \le p < \infty$ wird auf $\mathbb{R}^l$ durch $\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{l} |x_j|^p\right)^{1/p}$ eine Norm definiert. Die induzierte Operatornorm sei ebenfalls mit $\|\cdot\|_p$ bezeichnet.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ gilt:
$$\|A\|_1 := \max_{k=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{m} |a_{jk}|$$

(b) Für $n = m$, zeigen Sie:
$$\frac{1}{\sqrt{n}}\,\|A\|_2 \le \|A\|_1 \le \sqrt{n}\,\|A\|_2$$

Aufgabe 5 (Fehlerabschätzung) (4 Punkte)

Seien $b \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar, und $x \in \mathbb{R}^n$ definiert, sodass $Ax = b$. Für eine approximative Lösung $y \in \mathbb{R}^n$ definiere den Fehler $e := x - y$ und das Residuum $r = b - Ay$. Zeigen Sie, dass:
$$\frac{1}{\mathrm{cond}_{\|\cdot\|}(A)}\frac{\|r\|}{\|b\|} \le \frac{\|e\|}{\|x\|} \le \mathrm{cond}_{\|\cdot\|}(A)\frac{\|r\|}{\|b\|}$$