Abteilung für
Angewandte Mathematik

Dr. Alexei Gazca, Tatjana Stiefken 6. November 2023

Numerik I

WiSe 2023/2024 — Blatt 2

`https://aam.uni-freiburg.de/agru/lehre/ws23/num/index.html`

Abgabe: 17.11.2023, 10:00 Uhr.

Aufgabe 1 (1+1+1 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine positiv definite Matrix, d.h es gelte $x^\top Ax > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

(a) Zeigen Sie, dass A regulär ist.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $k \in \{1, \dots, n\}$ die $k \times k$-Untermatrix $A_k = (a_{ij})_{1\le i,j\le k}$ ebenfalls positiv definit ist.

(c) Zeigen Sie, dass alle reellen Eigenwerte von A positiv sind.

Bemerkung. Eine Konsequenz dieser Aufgabe und Satz 3.1 ist, dass positive definite Matrizen eine eindeutige normalisierte LU-Zerlegung besitzen.

Aufgabe 2 (1+2 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die reguläre Matrix $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ keine normalisierte LU-Zerlegung und keine Cholesky-Zerlegung besitzt.

(b) Berechnen Sie die normalisierte LU-Zerlegung von A_2 und die Cholesky-Zerlegung von A_3 mit

$$A_2 = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 10 & 8 & 8 \\ 15 & 11 & 10 \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 9 \\ 12 & 41 & 22 \\ 9 & 22 & 38 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Für $k \in \{1, \dots, n-1\}$ sei $L_k := I_n - \ell_k e_k^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit Vektoren $\ell_k := [0, \dots, 0, \ell_{k+1,k}, \dots, \ell_{n,k}]$ und es sei $\tilde{L} = L_{n-1} \cdots L_1$. Zeigen Sie, dass

$$\tilde{L}^{-1} = I_n + \sum_{k=1}^{n-1} \ell_k e_k^\top.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die invertierbaren (normalisierten) unteren Dreiecksmatrizen eine Gruppe bilden, d.h. sind $L, L_1, L_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (normalisierte) untere Dreiecksmatrizen und gilt $\det(L) \neq 0$, so sind L^{-1} und $L_1 L_2$ ebenfalls (normalisierte) untere Dreiecksmatrizen.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix, die aus vier Teilblöcken besteht:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

wobei $A_{11} \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $A_{12} \in \mathbb{R}^{m\times(n-m)}$, $A_{21} \in \mathbb{R}^{(n-m)\times m}$, und $A_{22} \in \mathbb{R}^{(n-m)\times(n-m)}$. Es sei angenommen, dass jede $k \times k$-Untermatrix von A mit $k \in \{1, \ldots, n\}$ regulär ist.

(a) Überprüfen Sie, dass

$$\begin{bmatrix} I & \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix}$$

(b) Die Matrix A_{21} kann nach m-Schritten des Gaußverfahrens eliminiert werden. Zeigen Sie, dass der resultierende untere rechte Block wieder $A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ ist.

Bemerkung. Teil (a) kann als das Gaußverfahren auf Ebene der Matrixblöcken interpretiert werden. Die Matrix $A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ heißt das Schur-Komplement von A_{11} in A.