Abteilung für
Angewandte Mathematik

Dr. Alexei Gazca, Tatjana Stiefken 20. November 2023

Numerik I

WiSe 2023/2024 — Blatt 3

Abgabe: 1.12.2023, 10:00 Uhr.

Aufgabe 1 (1+2+1 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine strikt Spalten-diagonaldominante Matrix, das heißt es gelte

$$\sum_{\substack{i=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| < |a_{jj}|, \quad j \in \{1,\dots,n\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Teilmatrizen $A_k = (a_{ij})_{1\le i,j\le k}$ für $k \in \{1,\dots,n\}$ ebenfalls strikt diagonaldominant sind.

(b) Zeigen Sie, dass die Matrix A regulär ist.

(c) Zeigen Sie, dass während der Anwendung des Gaußverfahrens an A, keine Pivotsuche nötig ist. (Bonus +3 Punkte: zeigen Sie, dass während der Anwendung des Gaußverfahrens mit Pivotsuche an A, kein Zeilentausch nötig ist.)

Tipp. Zeigen Sie zum Nachweis von (b), dass für eine geeignete Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$ die Abschätzung $\left\|A^\top x\right\| > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt, und folgern Sie daraus, dass A invertierbar ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Konstruieren Sie eine Permutationsmatrix $P \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, sodass die Matrix PA eine normalisierte LU-Zerlegung besitzt, wobei

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Lösen Sie damit das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $b = [-31, -21, -90, 50]^\top$ und berechnen Sie $\det(A)$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $a_j \in \mathbb{R}^n$ die j-te Spalte von A. Beweisen Sie die Hadamardsche Ungleichung:

$$|\det(A)| \le \prod_{j=1}^{n} \|a_j\|_2$$

Interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch, indem Sie die Tatsache nutzen, dass die Determinante das Volumen eines Parallelepipeds ist.

Aufgabe 4 (2+2 Punkte)

(a) Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $A = QR$ eine QR-Zerlegung. Zeigen Sie, dass R eine Cholesky-Zerlegung von $A^\top A$ definiert.

(b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär und $A = QR$ eine QR-Zerlegung. Zeigen Sie, dass $\mathrm{cond}_2(A) = \mathrm{cond}_2(R)$.

Aufgabe 5 (2+2 Punkte)

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reguläre Matrix mit den Spaltenvektoren $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$ und $q_1, \dots, q_n$ sei die daraus durch das Gram–Schmidt-Verfahren gewonnene Orthonormalbasis, das heißt

$$\tilde{q}_j = a_j - \sum_{k=1}^{j-1} (q_k^\top a_j) q_k, \qquad q_j = \frac{\tilde{q}_j}{\|q_j\|} \qquad \text{für } j \in \{1, \dots, n\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass für $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definiert durch $r_{kj} = q_k^\top a_j$ für $k < j$, $r_{kj} = 0$ für $k > j$, und $r_{jj} = \|\tilde{q}_j\|_2$ für $j \in \{1, \dots, n\}$, folgt $A = QR$.

(b) Berechnen Sie Q und R für

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$