Dr. Alexei Gazca, Tatjana Stiefken 4. Dezember 2023

Numerik I

WiSe 2023/2024 — Blatt 4

Abgabe: 15.12.2023, 10:00 Uhr.

Aufgabe 1 (Methode der kleinsten Quadrate und Moore-Penrose-Inverse) (3+2+1+3+2 Punkte)
Es sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, mit $m \geq n$, und $b \in \mathbb{R}^n$.

(a) Zeigen Sie, dass eine eindeutige Matrix $A^\dagger \in \mathbb{R}^{n\times m}$ existiert, so dass

$$AA^\dagger A = A, \qquad A^\dagger A A^\dagger = A^\dagger, \qquad (AA^\dagger)^\top = AA^\dagger, \qquad (A^\dagger A)^\top = A^\dagger A.$$

(b) Angenommen dass $\operatorname{rank}(A) = n$, zeigen Sie, dass $A^\dagger = (A^\top A)^{-1} A^\top$.

(c) Angenommen, dass A invertierbar ist (insbesondere $n = m$), zeigen Sie, dass tatsächlich $A^\dagger = A^{-1}$ gilt. Aus diesem Grund heißt $A^\dagger$ auch eine *verallgemeinerte Inverse*.

(d) Zeigen Sie, dass die allgemeine Lösung des Ausgleichungsproblems

$$\text{Minimiere } x \mapsto \|Ax - b\|_2^2\,, \tag{1}$$

die Form $x^\dagger + (I_n - A^\dagger A)w$ hat, wobei $x^\dagger := A^\dagger b$ und $w \in \mathbb{R}^n$ ist beliebig. Zeigen Sie dazu, dass $x^\dagger$ in $\operatorname{Im}(I_n - A^\dagger A)^\perp$ liegt.

(e) Man kann beweisen, dass das folgende Problem mindestens eine Lösung besitzt

$$\|x^\dagger\| = \inf\{\|x\| \mid x \in X \text{ und } x \text{ ist eine Lösung von (1)}\}$$

Zeigen Sie, dass tatsächlich $x^\dagger = A^\dagger b$; d.h. $x^\dagger$ ist die Lösung des Ausgleichungsproblems mit der kleinsten Norm.

(f) [Bonus +3 Punkte] Zeigen Sie, dass

$$A^\dagger = \lim_{\varepsilon\to 0}((A^\top A + \varepsilon I_n)^{-1} A^\top) = \lim_{\varepsilon\to 0}(A^\top (AA^\top + \varepsilon I_m)^{-1})$$

(g) [Bonus +1 Punkt] Definiere $A(\varepsilon) := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{smallmatrix}\right)$. Zeigen Sie, dass $\lim_{\varepsilon\to 0} A(\varepsilon)^\dagger$ nicht existiert; dies zeigt, dass die Moore-Penrose-Inverse $A \mapsto A^\dagger$ nicht unbedingt stetig ist.

Tipp zum Teil (d): Zeigen Sie, dass $\tilde{P} := I_n - A^\dagger A$ eine Orthogonalprojektion ist, und dass $\operatorname{Im}(\tilde{P}) = \ker(A)$.
Tipp zum Teil (e): Benutzen Sie Teil (d) und den Satz von Pythagoras.

Aufgabe 2 (1+2+2 Punkte)

(a) Seien $A, B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ orthogonal äquivalent, d.h. es gibt $Q \in O(m)$, sodass $A = QBQ^\top$. Zeigen Sie, dass A und B die gleiche Singulärwerte besitzen.

(b) Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ symmetrisch. Zeigen Sie, dass

$$\{\sigma_j \,:\, \sigma_j \text{ ist ein Singulärwert von } A\} = \{|\lambda_j| \,:\, \lambda_j \text{ ist ein Eigenwert von } A\}$$

(c) Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Zeigen Sie mithilfe der Singulärwertzerlegung, dass

$$\operatorname{rank}(A^\top A) = \operatorname{rank}(AA^\top) = \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A^\top)$$