Dr. Alexei Gazca, Tatjana Stiefken 18. Dezember 2023

Numerik I

WiSe 2023/2024 — Blatt 5

Abgabe: 12.01.2024, 10:00 Uhr.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Die Normalform eines linearen Programms lautet:

$$\begin{gathered} A \in \mathbb{R}^{m\times n},\, b \in \mathbb{R}^m,\, c \in \mathbb{R}^n, \\ M = \{x \in \mathbb{R}^n \,: Ax = b,\, x \geq 0\}, \\ \text{Finde } x^\star \in M, \text{ sodass } f(x^\star) = \min_{x\in M} f(x) := c^\top x \end{gathered} \tag{P1}$$

In der Praxis können lineare Programme auch die folgenden Formen annehmen:

$$\begin{gathered} \breve{A} \in \mathbb{R}^{\breve{m}\times\breve{n}},\, \breve{b} \in \mathbb{R}^{\breve{m}},\, \breve{c} \in \mathbb{R}^{\breve{n}}, \\ \breve{M} = \{\breve{x} \in \mathbb{R}^{\breve{n}} \,:\, \breve{A}\breve{x} = \breve{b}\}, \\ \text{Finde } x^\circledast \in \breve{M}, \text{ sodass } f(x^\circledast) = \min_{\breve{x}\in\breve{M}} f(\breve{x}) := \breve{c}^\top \breve{x} \end{gathered} \tag{P2}$$

$$\begin{gathered} \hat{A} \in \mathbb{R}^{\hat{m}\times\hat{n}},\, \hat{b} \in \mathbb{R}^{\hat{m}},\, \hat{c} \in \mathbb{R}^{\hat{n}}, \\ \hat{M} = \{\hat{x} \in \mathbb{R}^{\hat{n}} \,:\, \hat{A}\hat{x} \leq \hat{b}\}, \\ \text{Finde } x^\bullet \in \hat{M}, \text{ sodass } f(x^\bullet) = \min_{\hat{x}\in\hat{M}} f(\hat{x}) := \hat{c}^\top \hat{x} \end{gathered} \tag{P3}$$

$$\begin{gathered} \tilde{A} \in \mathbb{R}^{\tilde{m}\times\tilde{n}},\, \tilde{b} \in \mathbb{R}^{\tilde{m}},\, \tilde{c} \in \mathbb{R}^{\tilde{n}}, \\ \tilde{M} = \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^{\tilde{n}} \,: \tilde{A}\tilde{x} \leq \tilde{b},\, \tilde{x} \geq 0\}, \\ \text{Finde } x^\circledast \in \tilde{M}, \text{ sodass } f(x^\circledast) = \min_{\tilde{x}\in\tilde{M}} f(\tilde{x}) := \tilde{c}^\top \tilde{x} \end{gathered} \tag{P4}$$

Zeigen Sie, dass die Probleme (P2), (P3) und (P4) lassen sich in Normalform (P1) umschreiben.

Aufgabe 2 (2+4+2 Punkte)

(a) Sei $x^\star \in M$ eine Lösung eines linearen Programms in Normalform (P1). Zeigen Sie, dass $x^\star \in \partial M$.

(b) [Bonus +3 Punkte] Zeigen Sie, dass wenn das Problem (P1) lösbar ist, dann mindestens eine Ecke ist auch eine Lösung.

(c) Sei die zulässige Menge M von (P1) nichtleer. Mithilfe des linearen Programms:

$$\begin{gathered} \tilde{M} = \{(x,\tilde{x}) \in \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m \,:\, Ax + \tilde{x} = b,\, x, \tilde{x} \geq 0\}, \\ \text{Finde } (x^\star, \tilde{x}^\star) \in \tilde{M}, \text{ sodass } \tilde{f}(x^\star, \tilde{x}^\star) = \min_{(x,\tilde{x})\in\tilde{M}} \tilde{f}(x,\tilde{x}) := \sum_{i=1}^m \tilde{x}_i, \end{gathered}$$

beweisen Sie, dass M mindestens eine Ecke besitzt. Zeigen Sie außerdem, dass es endlich viele Ecken gibt.

(d) Angenommen dass M nichtleer und beschränkt ist, zeigen Sie, dass Problem (P1) eine Lösung besitzt.

Tipp (teil (b)): Falls eine Lösung $x \in M$ keine Ecke ist, es gibt $y \in \ker(A), y \neq 0, y_{J_x} = 0$. Könnte $x + ty$ (für geignet gewähltes $t \in \mathbb{R}$) sowohl eine Ecke als auch eine Lösung sein?

Tipp: Sie dürfen Teil (b) in Teil (c) und Teil (d) verwenden, auch wenn Sie es nicht gelöst haben.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösung des linearen Programms:

$$M = \{x \in \mathbb{R}^2 \,:\, x_1 + 6x_2 \leq 30,\ 2x_1 + 2x_2 \leq 15,\ 4x_1 + x_2 \leq 24,\ x_1, x_2 \geq 0\},$$
$$\text{Finde } x^\star \in M, \text{ sodass } f(x^\star) = \min_{x \in M} f(x) := -2x_1 - x_2$$