

Numerik I

WiSe 2023/2024 — Blatt 6

Abgabe: 26.01.2024, 10:00 Uhr.

Aufgabe 1

(3 Punkte)

Zeigen Sie, dass das Charakteristische Polynom $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ der $n \times n$ -Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & 0 & & -a_1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ & & & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

gegeben ist durch $p(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0)$.

Aufgabe 2

(2+2+1 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Definiere den Rayleigh-Quotienten:

$$r: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \quad r(x) = \frac{x^\top Ax}{\|x\|_2^2}$$

- (a) Berechnen Sie $\nabla r(x)$.
- (b) Es sei A symmetrisch. Seien $v \in \mathbb{R}^n$ ein Eigenvektor von A und λ der zugehörige Eigenwert. Zeigen Sie, dass $r(v) = \lambda$ und dass der Rayleigh-Quotienten eine quadratisch genaue Schätzung von λ ist:

$$r(x) - r(v) = O(\|x - v\|_2^2) \quad \text{für } x \rightarrow v.$$

- (c) Gilt (b) auch, wenn A nicht symmetrisch ist?

Aufgabe 3

(2 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine orthogonale Matrix. Was passiert, wenn Algorithmus 8.2 (QR -Verfahren) auf A angewendet wird? Widerspricht dies Satz 8.6?

Aufgabe 4

(2+2+3+3 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- (a) Zeigen Sie, dass eine Householder-Matrix $\tilde{H} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ existiert, sodass für $B = HAH^\top$ mit $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{H} \end{bmatrix}$ die Eigenschaft $b_{i1} = 0$ für $i > 2$ gilt.
- (b) Folgern Sie, dass sich A mit $n - 2$ Ähnlichkeitstransformationen in eine Hessenberg-Matrix $\hat{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ überführen lässt (d.h. $\hat{a}_{ij} = 0$ für $i > j + 1$).
- (c) Zeigen Sie, dass wenn A symmetrisch ist, dann ist \hat{A} eine Tridiagonalmatrix (d.h. $\hat{a}_{ij} = 0$ für $|i - j| > 1$). Diskutieren Sie den erforderlichen numerischen Aufwand in einem Schritt des QR -Verfahrens (lohnt es sich, A in eine Tridiagonalmatrix umzuwandeln?).

(d) Zeigen Sie, dass die folgende Eigenschaften im QR -Verfahren erhalten bleiben:

- Symmetrie: $A = A^\top$
- Hessenberg-Struktur: $a_{ij} = 0$ für $i > j + 1$
- Tridiagonal-Struktur: $a_{ij} = 0$ für $|i - j| > 1$