Abteilung für
Angewandte Mathematik

Dr. Alexei Gazca, Tatjana Stiefken 29. Januar 2024

Numerik I

WiSe 2023/2024 — Bonusblatt

Abgabe: 9.02.2024, 10:00 Uhr.

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass für die Iterierten der Fixpunktiteration $x^{k+1} = \Phi(x^k)$ mit der Kontraktion $\Phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die Fehlerabschätzung:

$$\left\| x^k - x^* \right\| \leq \frac{q}{1-q} \left\| x^k - x^{k-1} \right\|$$

gilt. Inwiefern ist diese Abschätzung für praktische Zwecke relevant?

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Für die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gelte $\rho(I_n - A) < 1$. Zeigen Sie, dass A invertierbar ist und dass die Inverse A^{-1} gegeben ist durch die konvergente Reihe

$$A^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} (I_n - A)^i$$

Hinweis: Betrachten Sie die Matrix $B = I_n - A$ und argumentieren Sie wie bei der Bestimmung des Werts der geometrischen Reihe.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Entscheiden Sie für jede der nachfolgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist. Sie sollten Ihre Antwort begründen können.

(a) Ein stabiler Algorithmus impliziert gute Konditionierung.

(b) Das Gaußsche Eliminationsverfahren ist durchführbar für Matrizen, die eine Cholesky-Zerlegung besitzen.

(c) Für jede Vektornorm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$, jede orthogonale Matrix $Q \in O(n)$ und jeden Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $\|Qx\| = \|x\|$.

(d) Das Ausgleichsproblem besitzt stets eine Lösung.

(e) Für den ersten Singulärwert σ_1 von A gilt $\sigma_1 = \|A\|_2$.

(f) Jedes lineare Programm in Normalform besitzt eine Lösung.

(g) Es gibt eine Methode zur Bestimmung der Eigenwerte einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, die die Lösung in einer endlichen Anzahl von Schritten findet.

(h) Für symmetrische Matrizen stimmen Jacobi- und Gauß-Seidel-Verfahren überein.