Abteilung für
Angewandte Mathematik

Dr. Alexei Gazca, Tatjana Stiefken 29. Januar 2024

Numerik I

WiSe 2023/2024 — Bonusblatt

Abgabe: 9.02.2024, 10:00 Uhr.

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass für die Iterierten der Fixpunktiteration $x^{k+1} = \Phi(x^k)$ mit der Kontraktion $\Phi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die Fehlerabschätzung:

$$\left\| x^k - x^* \right\| \leq \frac{q}{1-q} \left\| x^k - x^{k-1} \right\|$$

gilt. Inwiefern ist diese Abschätzung für praktische Zwecke relevant?

Lösung:

Da Φ eine Kontraktion ist, gilt für $x, y \in \mathbb{R}^n$ beliebig, dass

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq q \|x - y\| .$$

Hieraus folgt mit der Dreiecksungleichung und der Iterationsvorschrift $x^{k+1} = \Phi(x^k)$ direkt, dass für $m \geq k$

$$\left\| x^k - x^m \right\| \leq \sum_{j=k}^{m} \left\| x^j - x^{j-1} \right\| \leq \sum_{j=1}^{m-k} q^j \left\| x^k - x^{k-1} \right\| .$$

Durch Betrachtung des Grenzwertes $m \to \infty$ folgt die Aussage aus der geometrischen Reihe, da

$$\sum_{j=1}^{\infty} q^j = \sum_{j=0}^{\infty} q^j - 1 = \frac{1}{1-q} - 1 = \frac{q}{1-q}.$$

Diese Abschätzung ist für praktische Zwecke relevant, da alle Größen auf der rechten Seite der Ungleichung bekannt sind. Demnach kann diese Ungleichung als a posteriori Abschätzung dienen und gibt Information darüber, wie nah die berechnete Iteration dem Fixpunkt ist (zum Beispiel kann damit auch ein sinnvolles Abbruchkriterium für den Algorithmus definiert werden).

Anmerkung: Die Abschätzung ist außerdem interessant, da sie für den Beweis des Banachschen Fixpunktsatzes verwendet wird. Insbesondere folgt aus ihr, dass

$$\left\| x^k - x^* \right\| \leq \frac{q^k}{1-q} \left\| x^1 - x^0 \right\|$$

gilt. Da $q < 1$ ist, konvergiert die so definierte Folge also für beliebige x_0 gegen den Fixpunkt von Φ. Der Banachsche Fixpunktsatz wird in vielen Bereichen der Mathematik verwendet, zum Beispiel kann mit seiner Hilfe die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen unter gewissen Voraussetzungen gezeigt werden (Satz von Picard-Lindelöf, siehe Satz 20.2). Auch für die Nullstellenberechnung können Fixpunkte nützlich sein (bei Interesse: Kapitel 15.1).

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Für die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gelte $\rho(I_n - A) < 1$. Zeigen Sie, dass A invertierbar ist und dass die Inverse A^{-1} gegeben ist durch die konvergente Reihe

$$A^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty}(I_n - A)^i$$

Hinweis: Betrachten Sie die Matrix $B = I_n - A$ und argumentieren Sie wie bei der Bestimmung des Werts der geometrischen Reihe.

Lösung:

Zuerst überlegen wir uns, dass die Reihe wirklich konvergent ist. Definiere die $k - te$ Partialsumme der Reihe durch $S_k := \sum_{i=0}^{k}(I_n - A)^i$. Es gilt für $k < m$, dass

$$\|S_k - S_m\|_2 = \left\| \sum_{i=k+1}^{m} (I_n - A)^i \right\|_2 \leq \sum_{i=k+1}^{m} \left\|(I_n - A)^i\right\|_2 = \sum_{i=k+1}^{m} \|(I_n - A)\|_2^i$$

woraus direkt folgt, dass $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist (da $\rho(I_n - A) < 1$). Demnach existiert der Grenzwert von $\sum_{i=0}^{\infty}(I_n - A)^i$.
Definiere nun $B := I_n - A$, dann gilt

$$A^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty}(I_n - A)^i \Leftrightarrow (I - B)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} B^i$$

und

$$S_k = \sum_{i=0}^{k} B^i.$$

Nun rechnen wir nach, dass $\lim_{k\to\infty} S_k$ das Inverse zu $(I_n - B)$ ist:

$$(I_n - B)S_k = S_k - BS_k = \sum_{i=0}^{k} B^i - \sum_{i=1}^{k+1} B^i = I_n - B^{k+1}$$

Da $\rho(B^{k+1}) < 1$ ist, folgt die Aussage. Analog rechnet man $\lim_{k\to\infty} S_k(I_n - B) = I_n$ nach.
Anmerkung: Die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty}(I_n - A)^i$ wird als Neumannreihe bezeichnet. Die Partialsummen S_k können iterativ berechnet werden durch $S_0 = I$, $S_k = I + BS_{k-1}$ für $k > 1$. Analog zu Aufgabe 1 kann man die Fehlerabschätzung

$$\|S_k - S\| \leq \frac{\|B\|_2^k}{1 - \|B\|_2}$$

herleiten. Man kann dieses Vorgehen auch als einen Spezialfall des Banachschen Fixpunktsatzes betrachten. Vor allem aber kann man aber durch diese Reihe eine relativ kostengünstige Approximation der Inversen einer solchen Matrix erhalten, indem die $k-$te Partialsumme betrachtet wird.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Entscheiden Sie für jede der nachfolgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist. Sie sollten Ihre Antwort begründen können.

(a) Ein stabiler Algorithmus impliziert gute Konditionierung.

(b) Das Gaußsche Eliminationsverfahren ist durchführbar für Matrizen, die eine Cholesky-Zerlegung besitzen.

(c) Für jede Vektornorm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$, jede orthogonale Matrix $Q \in O(n)$ und jeden Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $\|Qx\| = \|x\|$.

(d) Das Ausgleichsproblem besitzt stets eine Lösung.

(e) Für den ersten Singulärwert σ_1 von A gilt $\sigma_1 = \|A\|_2$.

(f) Jedes lineare Programm in Normalform besitzt eine Lösung.

(g) Es gibt eine Methode zur Bestimmung der Eigenwerte einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, die die Lösung in einer endlichen Anzahl von Schritten findet.

(h) Für symmetrische Matrizen stimmen Jacobi- und Gauß-Seidel-Verfahren überein.

Lösung:

-