Abteilung für
Angewandte Mathematik

WiSe 2023/2024
Dr. Alexei Gazca, Tatjana Stiefken

Praktische Übungen zu Numerik I

Projekt 3 – 13.11.2023

Abgabe: per E-Mail bis Freitag, den 24.11.2023, 10:00 Uhr

Homepage zur Vorlesung:

`https://aam.uni-freiburg.de/agru/lehre/ws23/num/index.html`

Projekt 1 (8 Punkte)**.** Die Cholesky-Zerlegung $A = LL^\top$ einer symmetrisch und positiv definiten (spd) Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ lässt sich wie folgt rekursiv berechnen. Der Ansatz

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & a_{21} \\ a_{21}^\top & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & \\ l_{21}^\top & l_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{11}^\top & l_{21} \\ & l_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11}L_{11}^\top & L_{11}l_{21} \\ l_{21}^\top L_{11}^\top & l_{21}^\top l_{21} + l_{22}^2 \end{pmatrix}$$

für $A_{11} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}, a_{21} \in \mathbb{R}^{n-1}$ und $a_{22} \in \mathbb{R}$ liefert die Gleichungen

$$\begin{aligned} L_{11}l_{21} &= a_{21} \\ \text{und} \quad l_{22} &= \sqrt{a_{22} - l_{21}^\top l_{21}}, \end{aligned} \tag{0.1}$$

um aus der Cholesky-Zerlegung $A_{11} = L_{11}L_{11}^\top$ von A_{11} die Cholesky-Zerlegung von A zu berechnen. In jedem Rekursionsschritt sind die Größen L_{11}, a_{21}, a_{22} gegeben und die Größen l_{21} und l_{22} gesucht.

(1) Schreiben Sie eine Funktion `cholesky(A)` die zu einer gegebenen Matrix A den Cholesky-Faktor L rekursiv berechnet und diesen zurückgibt. (Sie dürfen davon ausgehen, dass die Eingabe `A` tatsächlich spd ist.)
Verwenden Sie `solve_triangular()` aus `scipy.linalg` (Python) bzw. `linsolve(_)` mit `opts.LT = true` (Matlab) zur Vorwärtselimination von (0.1).

(2) Testen Sie Ihre Funktion, indem Sie zu gegebenem $n \in \mathbb{N}$ den Cholesky-Faktor der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

berechnen und damit die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ für den Vektor $b = -(1, \dots, 1)^\top \in \mathbb{R}^n$ bestimmen.
Hinweis: Gibt es eine Funktion mit der Sie direkt die Matrix A erzeugen können?

(3) Plotten Sie die berechnete Lösung `x` für $n = 100$. Verwenden Sie dafür die Funktion `plot(x)` (in Python aus dem Paket `matplotlib.pyplot`).
Hinweis: Das Resultat sollte eine Parabel sein.

Projekt 2 (4 Punkte)**.** Implementieren sie eine Funktion um die LU-Zerlegung einer Matrix mit Hilfe von Spalten-Pivotsuche zu berechnen. Führen Sie für die Pivotsuche einen Vektor $p \in \mathbb{R}^n$ ein, der die Zeilenvertauschungen berücksichtigt. Implementieren Sie zudem ein Abbruchkriterium, das das Verfahren beendet, sofern für das Pivotelement $|a^{(k)}_{\pi(k),k}| \leq 10^{-10}$ gilt. Beim Lösen des resultierenden Gleichungssystems sind in der Rückwärtssubstitution die Zeilenvertauschungen zu beachten.