



Praktische Übungen zu Numerik I

Projekt 4 – 27.11.2023

Abgabe: per E-Mail bis Freitag, den 8.12.2023, 10:00 Uhr

Homepage zur Vorlesung:

<https://aam.uni-freiburg.de/agru/lehre/ws23/num/index.html>

Projekt 1 (4+2 Punkte).

- (1) Schreiben Sie ein Programm zur Berechnung der QR -Zerlegung mittels Householder Transformationen einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $m \geq n$ und A habe vollen Rang.
- (2) Verwenden Sie Aufgabenteil (a) zur Lösung des Linearen Ausgleichproblems

$$\text{Minimiere } x \mapsto \|b - Ax\|_2^2$$

Projekt 2 (6 Punkte). Die folgende Aufgabe greift dem Vorlesungsinhalt etwas vor. Wir wollen nun **alle** Eigenwerte einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit Hilfe des QR -Verfahrens berechnen. Der entsprechende Algorithmus ist unten aufgeführt.

Algorithm 0.1.

```
Setze  $A_0 = A$ .  
for  $k = 0, 1, 2, \dots$  do  
  Berechne  $QR$ -Zerlegung  $A_k = Q_k R_k$ .  
  Setze  $A_{k+1} = R_k Q_k$ .  
  if  $\|A_{k+1} - A_k\|_2 \leq \varepsilon_{stop}$  then  
    STOP.  
  end if  
end for
```

Grob gesprochen: falls A diagonalisierbar ist (mit reellen EWe $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n| > 0$), so approximiert $\text{diag}(A_k)$ diese EWe.

Implementieren Sie das Verfahren und testen Sie es für die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Verwenden Sie für die QR -Zerlegung Projekt 1.

Berechnen Sie das Verfahren nach 20 Iterationsschritten ab.

Hinweis: Zum Überprüfen der EWe können Sie die Funktionen `numpy.linalg.eig` (Python) bzw. `eig` (Matlab) verwenden.