Abteilung für
Angewandte Mathematik

WiSe 2023/2024

Dr. Alexei Gazca, Tatjana Stiefken

Praktische Übungen zu Numerik I

Projekt 5 – 11.12.2023

Abgabe: per E-Mail bis Freitag, den 22.12.2023, 10:00 Uhr

Homepage zur Vorlesung:

`https://aam.uni-freiburg.de/agru/lehre/ws23/num/index.html`

Projekt 1 (3+3 Punkte)**.** Im Folgenden wollen wir die Ausgleichsrechnung zur Glättung von Messwerten anhand von Polynomen verwenden. Dazu bezeichne m die Anzahl der gegebenen Messpunkte (x_i, y_i) für $i = 1, \ldots, m$ und n den Grad des approximierenden Polynoms. Gesucht ist also ein Polynom f vom Grad n so, dass folgender Term minimiert wird

$$\sum_{i=1}^{m} (f(x_i) - y_i)^2 .$$

(1) Schreiben Sie ein Programm, dass für gegebene Messpunkte (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, m$, und einen Polynomgrad n die Systemmatrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und den Vektor $b \in \mathbb{R}^m$ des Ausgleichproblems bestimmt.
Hinweis: Wenn $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot x^1 + \ldots + \alpha_n \cdot x^n$, dann muss die Matrix A folgende Gleichung erfüllen

$$Ax = A \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_m) \end{pmatrix}$$

(2) Geben seien folgende Messpunkte

i	1	2	3	4	5	6	7
x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	2.0	2.5	2.5	3.4	3.7	6.6	3

Bestimmen Sie für die Grade $n = 0, \ldots, 6$ jeweils das approximierende Polynom und plotten Sie das Ergebnis. Verwenden Sie Projekt 1 von Blatt 4 zum Lösen des Ausgleichproblems.
Sie können alternativ auch die Matlab-Funktion `lsqr` bzw. die Python-Funktion `numpy.linalg.lstsq` zum Lösen des Ausgleichsproblems verwenden.

Projekt 2 (6 Punkte)**.** Ein digitalisiertes Graustufenbild lässt sich mit einer $(m \times n)$-Matix beschreiben, in der der Eintrag (i, j) den Grauwert des Pixels (i, j) kodiert.
Sei nun $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ein digitalisiertes Bild mit Singulärwertzerlegung $A = U\Sigma V^\top$ und den Singulärwerten $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0$, $r = \mathrm{rang}(A)$.
Die beste Rang-k-Approximation A_k an A ist dann gegeben durch

$$A_k = U \begin{pmatrix} \Sigma_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^\top \text{ mit } \Sigma_k = \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_k) \in \mathbb{R}^{k \times k}, \quad 1 \leq k \leq r.$$

Wir fragen uns jetzt, ob A_k auch eine gute visuelle Approximation an das durch A gegebene Bild liefert. Man beachte, dass sich A_k alternativ auch als $A_k = U_k \Sigma_k V_k^\top$ schreiben lässt, wobei $U_k \in \mathbb{R}^{m \times k}$ die Matrix bezeichne, die entsteht, wenn man aus der Matrix U die Spalten $k+1$ bis m entfernt. Analog bezeichne $V_k \in \mathbb{R}^{n \times k}$ die Matrix V bis auf die Spalten $k+1$ bis n.
Erweitern Sie obige Idee auf ein RGB-Farbbild, also $A \in \mathbb{R}^{m \times n \times 3}$. Implementieren Sie diese Idee für verschiedene Werte von k und beurteilen sie den Qualitätsverlust für verschiedene Werte von k, berechnen Sie hierfür den Fehler $\|A - A_k\|_{\mathcal{F}}$. Kommentieren Sie Ihre Ergebnisse.
Verwenden Sie zum Laden des Bildes `weihnachtsbaum.jpg` die Vorlagen auf der Vorlesungswebseite. Zur Berechnung der Singulärwertzerlegung können Sie die Funktionen `svd` (Matlab) und `numpy.linalg.svd` (Python) verwenden.