Abteilung für
Angewandte Mathematik

M. Růžička
A. Gazca
K. Böcherer-Linder

21. Oktober 2024

Analysis I

WiSe 2024/25 — Blatt 2

`https://aam.uni-freiburg.de/agru/lehre/ws24/ana1/index.html`

Abgabe: 28.10.2024, 12:00 Uhr.

Präsenzaufgabe 1
Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Man folgere aus den Körperaxiomen:

(a) $(-a)^{-1} = -(a^{-1})$,

(b) Die Zahl $1 \in \mathbb{R}$ ist eindeutig bestimmt (siehe (1.7) im Skript),

(c) Sei $a \neq 0$. Die Gleichung $ax = b$ hat eine eindeutig bestimmte Lösung x. Die Lösung ist $a^{-1}b =: \frac{b}{a} =: b/a$.

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie mit Hilfe der Körperaxiome die folgenden Aussagen:

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$
$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad + bc}{cd}$$

Aufgabe 2 (5 Punkte)
Es seien $M, N \subset \mathbb{R}$ nicht leer und nach oben beschränkt.

(a) Wir definieren $M + N := \{x + y \mid x \in M,\ y \in N\}$. Zeigen Sie, dass das Supremum von $M + N$ existiert und dass gilt $\sup(M + N) = \sup(M) + \sup(N)$.

(b) Zeigen Sie, dass für alle reellen Zahlen $\varepsilon > 0$ ein $x \in M$ existiert mit $(\sup M) - \varepsilon < x$.

Aufgabe 3B (6 Punkte)
Sei $d \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl, die das Quadrat einer rationalen Zahl $\xi \in \mathbb{Q}$ sei, d.h. $d = \xi^2$. Zeigen Sie, dass $d = n^2$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt.
Anleitung. Sei o.B.d.A. (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) $\xi > 0$. Es seien m die kleinste natürliche Zahl, sodass $m \cdot \xi \in \mathbb{N}$ und n die kleinste natürliche Zahl mit $\xi \leq n$.

(a) Zeigen Sie, dass m und n mit den geforderten Eigenschaften existieren.

Setze $p := m \cdot (\xi - n + 1)$. Zeigen Sie:

(b) $p \in \mathbb{N}$ und $p \leq m$,

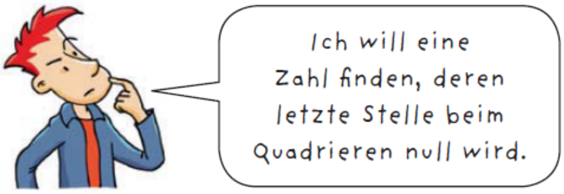
(c) $p \cdot \xi \in \mathbb{N}$,

(d) $p = m$ und $\xi = n$.

Aufgabe 3L (6 Punkte)

Folgende Auszüge einer Aufgabe sind dem Schulbuch *Mathewerkstatt* (Klasse 9, S. 109) von Cornelsen entnommen:

16 Nachkommastellen untersuchen



a) Till untersucht mit dem Taschenrechner, wie die Quadrate von Dezimalzahlen aussehen.

- Warum ist er sicher, dass das Quadrat der Zahl sechs Nachkommastellen hat?
- Wie lautet die sechste Nachkommastelle bei seiner Zahl im Bild? Warum ist das so? Probiere mehrere Beispiele.

e) Pia betrachtet Tills Versuche und argumentiert:

Alle Quadrate von Dezimalzahlen produzieren wieder Dezimalzahlen, aber keine natürlichen Zahlen.
Also haben alle Wurzeln von natürlichen Zahlen entweder keine oder unendlich viele Nachkommastellen, aber keine endliche Anzahl von Nachkommastellen.

Was meint Pia, und inwiefern hat sie Recht?

(i) Beantworten Sie die Fragen von Teilaufgabe (a). Geben Sie dabei auch für andere Beispiele an, wie jeweils die letzte Nachkommastelle nach dem Quadrieren aussieht, und begründen Sie ausführlich.

(ii) Beantworten Sie die Frage von Teilaufgabe (e).

(iii) Erklären Sie, inwiefern diese Schulbuchaufgabe eine Begründung für die Aussage von Aufgabe 3B auf diesem Übungsblatt liefert.