Abteilung für
Angewandte Mathematik

M. Růžička
A. Gazca
K. Böcherer-Linder

28. Oktober 2024

Analysis I

WiSe 2024/25 — Blatt 3

`https://aam.uni-freiburg.de/agru/lehre/ws24/ana1/index.html`

Abgabe: 04.11.2024, 12:00 Uhr.

Präsenzaufgabe

(a) Betrachte die folgende **falsche** Behauptung:

Behauptung:

In jedem Sack Erbsen gibt es entweder nur gelbe oder nur nichtgelbe Erbsen.

„Beweis" mit vollständiger Induktion über die Anzahl n der Erbsen im Sack:

Der Induktionsanfang $n = 1$ ist trivial. Nehmen wir im Induktionsschritt aus einem Sack mit $n \geq 1$ Erbsen eine Erbse e heraus (ohne sie anzusehen), so sind die restlichen $n - 1$ Erbsen nach Induktionsannahme alle gelb oder alle nichtgelb. Um diesen Farbton festzustellen, entnehmen wir dem Sack eine weitere Erbse g und legen die Erbse e wieder in den Sack. Der Sack enthält also wieder $n - 1$ Erbsen, die nach Induktionsannahme entweder alle gelb oder alle nichtgelb sind. Also ist e genau dann gelb wenn auch g gelb ist. Der Induktionsbeweis ist beendet.

Wo liegt der Fehler im Beweis?

(b) Beweisen Sie mit Hilfe der Körperaxiome und vollständiger Induktion, dass für alle $b \in \mathbb{R}$ mit $b \neq 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\left(\frac{1}{b}\right)^n = \frac{1}{b^n}.$$

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Beweisen Sie:

(a) Sei $b \in \mathbb{R}^+$. Die Menge $M := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0,\ x^2 < b\}$ hat ein Supremum in $\mathbb{R}$.

(b) Setze $b = 2$ und sei $s := \sup(M)$ das Supremum aus (a). Es gilt $s^2 = 2$. (*Hinweis:* Aufgabe 2b, Blatt 2.)

(c) Die Menge $N := \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0,\ x^2 < 2\}$ hat eine obere Schranke in $\mathbb{Q}$, aber kein Supremum in $\mathbb{Q}$. (*Hinweis:* Aufgabe 3B, Blatt 2.)

(d) Die Gleichung $x^2 = 2$ hat genau eine Lösung in $\mathbb{R}^+$ und diese liegt in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion die *Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung:*
Seien $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}$$

Bemerkung. Die Wurzel $\sqrt{b}$ einer nicht-negativen Zahl $b \in \mathbb{R}$ wird definiert als die eindeutige Lösung der Gleichung $x^2 = b$ in $\mathbb{R}^+$. Aufgabe 1 zeigt die Existenz von $\sqrt{2}$; der allgemeine Beweis folgt analog.

Aufgabe 3B (3 Punkte)

Zeigen Sie:

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N} : (m > n \Rightarrow m - n \in \mathbb{N}).$$

Aufgabe 3L (3 Punkte)

In Klasse 8 lernen Schülerinnen und Schüler das Intervallhalbierungsverfahren kennen. Für das folgende Beispiel aus dem aktuellen Schulbuch *Elemente der Mathematik* (Klasse 8, S. 105) denken wir uns das Intervallhalbierungsverfahren weiter fortgesetzt und fassen sämtliche „unteren Näherungszahlen” als menge M auf.

Erklären Sie die Bedeutung des Begriffes „Supremum der Menge M” und die Aussage des Vollständigkeitsaxioms für diesen Schulkontext.

Einführung

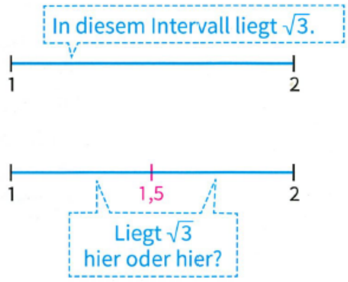
Intervall [a; b]
Menge aller Zahlen x, für die gilt:
$a \le x \le b$

Du hast Wurzeln schon durch Probieren näherungsweise bestimmt. Jetzt soll ein *systematisches* Verfahren entwickelt werden, das sich so eindeutig beschreiben lässt, dass es gut von einem Computer durchgeführt werden kann.

Für z.B. $\sqrt{3}$ kann man folgendermaßen Näherungswerte systematisch verbessern.

$\sqrt{3}$ liegt offensichtlich zwischen 1 und 2, denn es gilt:

$1^2 = 1 < 3$ und $2^2 = 4 > 3$.



Wir halbieren das Intervall [1;2], in dem $\sqrt{3}$ liegt, und entscheiden, ob die Mitte des Intervalls 1,5 eine untere oder eine obere Näherungszahl für $\sqrt{3}$ ist:

$1{,}5^2 = 2{,}25 < 3$. Also liegt $\sqrt{3}$ zwischen 1,5 und 2.

Wir bilden wieder die Intervallmitte von [1,5; 2] als Mittelwert der beiden Intervallgrenzen:

$(1{,}5 + 2) : 2 = 1{,}75$.

Wegen $1{,}75^2 = 3{,}0625 > 3$ ist 1,75 eine obere Näherungszahl für $\sqrt{3}$; also liegt $\sqrt{3}$ zwischen 1,5 und 1,75.

Diese Überlegungen lassen sich gut in einer Tabelle zusammenfassen:

Untere Näherungszahl	Obere Näherungszahl	Mittelwert	Mittelwert²	Differenz der Näherungszahlen
1	2	1,5	2,25	2 − 1 = 1
1,5	2	1,75	3,0625	2 − 1,5 = 0,5
1,5	1,75	1,625	2,640625	1,75 − 1,5 = 0,25
1,625	1,75	1,6875	≈ 2,85	0,125
1,6875	1,75	1,71875	≈ 2,95	0,0625
1,71875	1,75	1,734375	≈ 3,01	0,03125
1,71875	1,734375	1,7265625	≈ 2,98	0,015625

wird von Schritt zu Schritt halbiert

Also gilt: $1{,}7265625 \le \sqrt{3} \le 1{,}734375$.

Dafür schreiben wir auch:

$\sqrt{3} \in [1{,}7265625; 1{,}734375]$, gelesen: *$\sqrt{3}$ liegt in dem* **Intervall** *von 1,7265625 bis 1,734375.*

Die somit *gesicherten Ziffern* von $\sqrt{3}$ sind 1,7.