Abteilung für
Angewandte Mathematik

M. Růžička
A. Gazca
K. Böcherer-Linder

4. November 2024

Analysis I

WiSe 2024/25 — Blatt 4

`https://aam.uni-freiburg.de/agru/lehre/ws24/ana1/index.html`

Abgabe: 11.11.2024, 12:00 Uhr.

Präsenzaufgabe
Untersuchen Sie die Konvergenz der folgenden Folgen und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert.

$$\text{(a)} \quad a_n = \frac{n^3+1}{100n^2-n-8} \qquad \text{(b)} \quad a_n = \frac{2n^2+7n+3}{5n^3+6}$$

Aufgabe 1 (5 Punkte)

(a) Gegeben seien die folgenden Funktionen:

(i) $f_1 \colon \mathbb{R} \to [0,\infty) : x \mapsto x^2$,

(ii) $f_2 \colon [0,\infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}$.

Überprüfen Sie, welche dieser Funktionen injektiv, surjektiv und bijektiv sind.

(b) Schränken Sie den Definitions- und Bildbereich von f_1 und f_2 sinnvoll so ein, dass die Funktionen bijektiv werden. Geben Sie die Umkehrfunktionen samt Definitions- und Wertebereich an.

Aufgabe 2 (5 Punkte)
Seien M_1, M_2, M_3 Mengen und seien $f \colon M_1 \to M_2$, $g \colon M_2 \to M_3$ Funktionen. Beweisen Sie:

(a) Sei $g \circ f$ injektiv und f surjektiv, dann ist g injektiv.

(b) Sei $g \circ f$ surjektiv und g injektiv, dann ist f surjektiv.

(c) Ist f injektiv, so ist $f^{-1} := \{(f(x), x) \mid x \in M_1\}$ eine Abbildung von $\mathrm{Bild}(f)$ nach M_1.

Aufgabe 3B (5 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{N} \cup \{0\}$ abzählbar ist.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Die Menge der endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist abzählbar.

(*Hinweis:* Sei B_n die Menge aller n-elementigen Teilmengen von $\mathbb{N}$; zeigen Sie mit Induktion, dass B_n abzählbar ist. Auch nützlich: $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$ ist abzählbar, falls alle M_n abzählbar sind.)

Aufgabe 3L (5 Punkte)

Laut Bildungsplan für die Klassenstufe 10 sollen „Schülerinnen und Schüler die Bedeutung des Binomialkoeffizienten erläutern können". Mit der Bedeutung ist nicht die Formel für die Berechnung gemeint, sondern folgende inhaltliche Deutung:

„Der Binomialkoeffizient gibt die Anzahl der Möglichkeiten an, aus n Objekten k auszuwählen (ohne Berücksichtigung der Reihenfolge)", vgl. Lambacher Schweizer, Klasse 10, S. 134.

(a) Erklären Sie den Zussamenhang zwischen der inhaltlichen Bedeutung und der Formel $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ aus der Vorlesung.

Überlegen Sie sich hierfür zunächst, wie viele Möglichkeiten man hätte, aus n Objekten k auszuwählen, wenn man die Reihenfolge berücksichtigen würde.

(b) In der Vorlesung haben Sie die allgemeine Binomische Formel mit Hilfe der vollständigen Induktion bewiesen. Begründen Sie nun auf Schülerniveau (indem Sie sich auf die inhaltliche Deutung des Binomialkoeffizienten stützen), warum in der folgenden Gleichung Binomialkoeffizienten stehen:

$$(a+b)^5 = \binom{5}{0}a^5 + \binom{5}{1}a^4b + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}ab^4 + \binom{5}{5}b^5.$$

Erstsemester-Hütte

Bald ist es endlich wieder soweit und es geht auf die Erstihütte. Alles, was ihr dazu wissen müsst, erfahrt ihr hier:

Wann geht's los?

Am Freitag, den **06.12.24** (ca. 9 – 10 Uhr für die Wanderung zur Hütte, ca. 14 Uhr für alle Anderen)

Zurück kommen wir am Sonntag, dem **08.12.24.** (ca. 15 Uhr)

Wo geht es eigentlich hin?

Wir fahren ins Dekan-Strohmeyer-Haus im Münstertal im Schwarzwald.

Was macht man denn eigentlich auf so einer Hütte?

Sich entspannen, Mitstudierende kennenlernen, an lustigen Workshops teilnehmen, Spiele spielen, lecker essen, …

Und was kostet das?

Der Teilnehmer:innen-Beitrag steht noch nicht fest, da wir gerade noch abwarten müssen, welche Zuschüsse wir bekommen. Dieser wird per Mail (siehe unten) und an der Tür zum Ersti-Raum noch vor der Anmeldung kommuniziert.

Wie meldet man sich an?

Am Montag, dem 11. November, könnt ihr euch **ab 10:00 Uhr vor dem Fachschaftsraum** verbindlich anmelden - bitte bringt den Teilnehmer:innen-Beitrag passend mit!
Falls ihr selbst nicht dort sein könnt, könnt ihr auch eine:n Kommiliton:in mit dem passenden Bargeld schicken; spätere Anmeldungen können wir aktuell noch nicht garantieren.
Die bezahlte Anmeldung ist **verbindlich**! Das heißt, wenn ihr doch nicht mitkommt, werden wir euch den Beitrag nicht erstatten können, da dieser nicht kostendeckend sein wird.
Bei der Anmeldung brauchen wir von euch unter anderem folgende Infos. Macht euch darüber bitte bis dorthin schonmal Gedanken.

- Könnt ihr ein Auto zur Verfügung stellen?
- Wie viele Kuchen bringt ihr mit?
- Wollt ihr zur Hütte wandern?

Und mein Mathe-Zettel?

Die Erfahrung hat gezeigt, dass dafür immer genug Zeit blieb und da noch viele ältere Mathestudis mitfahren, könnt ihr bestimmt auch den einen oder anderen Tipp bekommen…

Zukünftige Infos?

Infos wie diese werden wir zukünftig über den „Jahrgangsverteiler" schicken. Falls ihr während der ESE nicht schon eure Mail-Adresse auf die Liste eingetragen habt, könnt ihr euch dort anmelden indem ihr eine leere Mail an jahrgang2024-on@math.uni-freiburg.de schreibt. Über diesen Verteiler werden wir nächste Woche auch den Beitrag kommunizieren.

Wenn ihr noch Fragen habt, dann mailt uns an **erstis@math.uni-freiburg.de**
Emilia, Julian, Pia und die Mathefachschaft