Abteilung für
Angewandte Mathematik

M. Růžička
A. Gazca
K. Böcherer-Linder

11. November 2024

Analysis I

WiSe 2024/25 — Blatt 5

`https://aam.uni-freiburg.de/agru/lehre/ws24/ana1/index.html`

Abgabe: 18.11.2024, 12:00 Uhr.

Präsenzaufgabe

Seien $(a_n), (b_n), (c_n)$ reelle Folgen mit $a_n \le b_n \le c_n$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n$. Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} b_n$ existiert und $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n$ gilt.

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert

$$\begin{aligned} a_n &:= \sqrt{n}(\sqrt{n-1} - \sqrt{n}) \\ b_n &:= \frac{n^3 + 10n^2}{2n^3 + 13n} \\ c_n &:= \sqrt[n]{3^n + 5^n + 7^n} \\ d_n &:= \frac{n!}{10^n} \\ e_n &:= \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right). \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $n \ge 1$. Berechnen Sie den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{3}{2}}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} - 2\sqrt{n}).$$

Aufgabe 3B (5 Punkte)

Seien $x_1, y_1 > 0$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $x_{n+1} := \sqrt{x_n y_n}$ und $y_{n+1} := \frac{x_n + y_n}{2}$. Zeigen Sie, dass die Folgen (x_n) und (y_n) konvergieren und es gilt $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$.

Aufgabe 3L (5 Punkte)

Im Vertiefungskurs Mathematik soll bislang in der Oberstufe in Baden-Württemberg auch das Thema Folgen behandelt werden. Dazu gehören die Begriffe Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz.

(i) Richtig oder falsch? Begründung bzw. Gegenbeispiel verlangt. Visualisieren Sie die Gegenbeispiele mit einer Skizze im Koordinatensystem.

  (a) Jede beschränkte Folge ist konvergent.
  (b) Jede konvergente Folge ist beschränkt.
  (c) Jede monotone Folge ist konvergent.
  (d) Jede konvergente Folge ist monoton.

(e) Jede monotone Folge ist beschränkt.

(f) Jede beschränkte Folge ist monoton.

(g) Jede monotone und beschränkte Folge ist konvergent.

Zusatz: Welche Aussagen werden richtig, wenn man die Eigenschaft nicht für die ganze Folge sondern nur für eine Teilfolge fordert?

(ii) Die Schülerinnen und Schüler eines Vertiefungskurses Mathematik in der Oberstufe wurden aufgefordert, den Grenzwert einer Folge in eigenen Worten zu definieren. Hanna sagt: „Ein Grenzwert iner Folge ist die Zahl, in deren beliebig kleiner Nähe unendlich viele Folgenglieder liegen". Tom sagt: „Kommt eine Folge einer Zahl immer näher, so ist diese Zahl der Grenzwert der Folge".

(a) Prüfen Sie die Charakterisierungen jeweils auf Korrektheit. Bennenen Sie, wo genau Fehler vorliegen.

(b) Geben Sie Beispiele an, die Hanna bzw. Tom die Fehler aufzeigen.