Abteilung für
Angewandte Mathematik

M. Růžička
A. Gazca
K. Böcherer-Linder

16. Dezember 2024

Analysis I

WiSe 2024/25 — Blatt 10

`https://aam.uni-freiburg.de/agru/lehre/ws24/ana1/index.html`

Abgabe: 07.01.2025, 12:00 Uhr.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ eine stetige, in 0 differenzierbare Funktion mit $f(0) = f'(0) = 0$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $g(f(x)) = x$ für alle $x \in (-1,1)$. Zeigen Sie, dass g im Punkt 0 nicht differenzierbar ist.

Lösung:

Angenommen, g wäre in 0 differenzierbar. Dann wäre die Kettenregel anwendbar (mit der Notation von Satz 1.5, Kapitel 6 im Skript wäre $D = (-1,1)$, $\tilde{D} = \mathbb{R}$, $a = 0$), denn es wäre f in 0 differenzierbar, der Wertebereich von f läge im Definitionsbereich von g und g wäre in $0 = f(0)$ differenzierbar. Nach der Kettenregel gälte also

$$\begin{aligned} & (g \circ f)'(0) = \frac{d}{dx} x \Big|_{x=0} \\ \Leftrightarrow \quad & g'(f(0))f'(0) = 1 \\ \Leftrightarrow \quad & g'(0) \cdot 0 = 1. \end{aligned}$$

was offenbar ein Widerspruch ist.

Bonusaufgabe 1 (6 Zusatzpunkte)

Eine Schnecke ist sturzbetrunken in einen 4m tiefen Brunnen gefallen. Bei dem Versuch, wieder herauszuklettern, schafft sie am ersten Tag einen Meter. Den zweiten Tag teilt sie sich in zwei Etappen ein, schafft aber pro Etappe nur q Meter ($0 < q < 1$). Am dritten Tag schafft sie drei Etappen mit jeweils q^2 Metern, am vierten Tag vier Etappen mit q^3 Metern usw. Wie groß muss q mindestens sein, damit die Schnecke in endlicher Zeit am Brunnenrand ankommt?

Hinweis: Cauchy-Produkt (Satz 2.11, Kapitel 3).

Lösung:

Die bis zum n-ten Tag gemessene Wegstrecke (vom Boden aus) ist

$$s_n := 1 + (q+q) + (q^2+q^2+q^2) + \dots + nq^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)q^k.$$

Dies kann man umschreiben:

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)q^k = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k} q^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k} q^j q^{k-j}. \end{aligned} \tag{1}$$

Die Schnecke erreicht den Rand des Brunnens genau dann in endlicher Zeit, falls es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $s_n \geq 4$. Da die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton steigend ist, ist dies genau dann der Fall wenn $\lim_{n\to\infty} s_n > 4$ (beachte: strikt größer!)

Ein Vergleich von (1) mit Satz 2.11 (Kapitel 3) liefert die Erkenntnis, dass $\lim_{n\to\infty} s_n$ das Cauchy-Produkt der geometrischen Reihe mit sich selbst ist (beachte, dass die geometrische Reihe absolut konvergiert):

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} q^j q^{k-j} &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k\right) \\ &= \frac{1}{(1-q)^2}. \end{aligned}$$

Die Schnecke kommt also genau dann in endlicher Zeit frei, wenn

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(1-q)^2} > 4 \\ \Leftrightarrow \quad & q > \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Falls $q = \frac{1}{2}$, nähert sie sich dem Brunnenrand an, ohne ihn je in endlicher Zeit zu erreichen.

Bonusaufgabe 2 (4 Zusatzpunkte)

(a) Seien $(a_n), (b_n)$ reelle Folgen derart, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ konvergieren. Zeigen Sie, dass dann auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergiert.

(b) Zeigen Sie zusätzlich, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

gilt. Dies verallgemeinert Aufgabe 2, Blatt 3.

Lösung:

(a) Wie man leicht nachrechnen, gilt $xy \leq x^2/2 + y^2/2$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Damit ist $a_n^2/2 + b_n^2/2$ eine Majorante von $a_n b_n$, die nach Voraussetzung in der Summe absolut konvergiert. Folglich konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ absolut.

(b) Mit Aufgabe 2 aus Blatt 3 schließen wir

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n b_n \\
&\leq \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} a_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{N} b_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \limsup_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} a_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \limsup_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} b_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

*** **Wir wünschen frohe Weihnachten und einen guten Grenzübergang ins neue Jahr!** ***