Abteilung für
Angewandte Mathematik

M. Růžička
A. Gazca
K. Böcherer-Linder

6. Januar 2025

Analysis I

WiSe 2024/25 — Blatt 11

https://aam.uni-freiburg.de/agru/lehre/ws24/ana1/index.html

Abgabe: 13.01.2025, 12:00 Uhr.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

(a) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und die Einschränkung $f|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}$ sei differenzierbar.

Zeigen Sie: Falls $\lim_{x\to 0} f'(x)$ existiert, so ist f auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt $f'(0) = \lim_{x\to 0} f'(x)$.

Hinweis: Mittelwertsatz.

(b) Es sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und gerade, d.h. $g(x) = g(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Dann gilt $g'(0) = 0$.

Lösung:

(a) Es sei f wie in der Aufgabe; insbesondere existiere $\lim_{x\to 0} f'(x)$. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ mit $x_n \to 0$ und betrachte den Differenzenquotienten

$$\frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0}.$$

Nach dem Mittelwertsatz existiert für jedes n ein ξ_n zwischen 0 und x_n, sodass

$$\frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} = f'(\xi_n).$$

Da x_n gegen 0 konvergiert, konvergiert auch ξ_n gegen 0 (z.B. weil $0 \le |\xi_n| \le |x_n|$). Nach Annahme und Satz 2.2 (Kapitel 4) existiert $\lim_{n\to\infty} f'(\xi_n)$. Also existiert auch der Grenzwert der linken Seite. Nochmalige Anwendung von Satz 2.2 (Kapitel 4) auf den Differenzenquotienten liefert die Existenz von $\lim_{x\to 0} \frac{f(x_n)-f(0)}{x_n-0}$. Die Gleichheit $f'(0) = \lim_{x\to 0} f'(x)$ wurde hiermit ebenfalls bewiesen.

(b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $g(x) = g(-x)$. Mit anderen Worten: Die Funktionen g und $h : x \mapsto g(-x)$ sind *gleich*. Folglich sind auch ihre Ableitungen gleich und mit der Kettenregel folgt

$$\begin{aligned} & g'(0) = h'(0) \\ \Leftrightarrow\quad & g'(0) = -g'(-0) \\ \Leftrightarrow\quad & g'(0) = -g'(0) \\ \Leftrightarrow\quad & g'(0) = 0. \end{aligned}$$