

## Analysis I

WiSe 2024/25 — Blatt 12

<https://aam.uni-freiburg.de/agru/lehre/ws24/ana1/index.html>

**Abgabe:** 20.01.2025, 12:00 Uhr.

### Aufgabe 2

(5 Punkte)

(a) Entscheiden Sie, ob die folgenden Funktionen auf dem Intervall  $[0, 1]$  Regelfunktionen sind:

$$(i) \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0. \end{cases} \quad (ii) \quad g(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \sqrt{x} \ln(x), & x > 0. \end{cases}$$

(b) Zeigen Sie: Sind  $f, g \in T([a, b])$ , so ist auch  $f \cdot g \in T([a, b])$ .

(c) Zeigen Sie: Sind  $f, g \in R([a, b])$ , so ist auch  $f \cdot g \in R([a, b])$ .

### Lösung:

- (a)
- Keine Regelfunktion, da unbeschränkt.
  - Regelfunktion, da stetig (z.B. mit Satz 1.2, Kapitel 7).
- (b) Analog zum Beweis für  $f + g$ . Wähle Unterteilungen  $(x_1, \dots, x_n)$  und  $(y_1, \dots, y_m)$  von  $[a, b]$  sodass  $f$  auf  $(x_{j-1}, x_j)$  konstant und  $g$  auf  $(y_{j-1}, y_j)$  konstant. Bilde die gemeinsame Verfeinerung  $(z_1, \dots, z_k)$ , die durch Ordnen der Menge  $\{x_1, \dots, x_n\} \cup \{y_1, \dots, y_m\}$  entsteht. Dann sind auf allen Teilintervallen  $(z_{j-1}, z_j)$  beide Funktionen  $f$  und  $g$  konstant, also auch ihr Produkt. Folglich ist  $f \cdot g$  eine Treppenfunktion.
- (c) Seien  $f \cdot g \in R([a, b])$  und sei o.B.d.A.  $g \neq 0$ . Wähle Folgen  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}, (g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $T([a, b])$  mit  $\|f_n - f\| \rightarrow 0$  und  $\|g_n - g\| \rightarrow 0$  und berechne

$$\begin{aligned} \|fg - f_n g_n\| &= \|fg - f_n g + f_n g - f_n g_n\| \\ &\leq \|fg - f_n g\| + \|f_n g - f_n g_n\| \\ &\leq \|g\| \|f - f_n\| + \|f_n\| \|g - g_n\|. \end{aligned}$$

Sei nun  $\varepsilon > 0$  und sei  $N$  so groß gewählt, dass  $\|f_n - f\| < \varepsilon$  und  $\|g_n - g\| < \varepsilon$  für alle  $n > N$ . Dann erhalten wir für  $n > N$

$$\begin{aligned} \|fg - f_n g_n\| &< \|g\| \varepsilon + (\|f_n - f\| + \|f\|) \varepsilon \\ &< \varepsilon (\|g\| + \|f\| + \varepsilon). \end{aligned}$$

Also gilt  $f_n g_n \rightarrow fg$  gleichmäßig.