Abteilung für
Angewandte Mathematik

M. Růžička
A. Gazca
K. Böcherer-Linder

20. Januar 2025

Analysis I

WiSe 2024/25 — Blatt 13

`https://aam.uni-freiburg.de/agru/lehre/ws24/ana1/index.html`

Abgabe: 27.01.2025, 12:00 Uhr.

Aufgabe 1 (5,5 Punkte)

Zeigen Sie die Hölder'sche Ungleichung für Integrale: Für $a < b$ und $f, g \in R([a,b])$ und $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt:

(a) Die Funktionen $|f|^p, |g|^q$ sind Regelfunktionen;

Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass $|a^\mu - b^\mu| \leq |a-b|^\mu$ für $a, b > 0$ und $\mu \in (0,1)$.

(b) Es gilt

$$\int_a^b |f(x)g(x)| \,\mathrm{d}x \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{q}}$$

Hinweis: Lassen Sie sich vom Beweis von Satz 3.9 (Kapitel 6) inspirieren.

Lösung:

(a) (Nur für f). Wähle eine natürliche Zahl $N > p$ und setze $\mu := p/N$. Dann gilt $\mu \in (0,1)$ und $|f|^p = (|f|^\mu)^N$. Mit Aufgabe 2(c), Blatt 12 sehen wir, dass es ausreicht, $|f|^\mu \in R([a,b])$ zu zeigen. Sei hierzu $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Treppenfunktionen, die gleichmäßig gegen f konvergiert. Dann folgt mit dem Hinweis:

$$\begin{aligned} & \big||f(x)|^\mu - |f_n(x)|^\mu\big| \leq \big||f(x)| - |f_n(x)|\big|^\mu \qquad \forall x \in [a,b] \\ \Rightarrow \qquad & \big\||f|^\mu - |f_n|^\mu\big\| \leq \big\||f| - |f_n|\big\|^\mu \\ & \leq \|f - f_n\|^\mu \end{aligned}$$

Da die rechte Seite gegen 0 konvergiert, konvergiert auch die linke Seite gegen 0. Damit ist $|f_n|^\mu$ eine Folge von Treppenfunktionen, die gegen $|f|^\mu$ konvergiert, also $|f|^\mu \in R([a,b])$.

(b) O.B.d.A. seien $\int_a^b |f|^p$, $\int_a^b |g|^q \neq 0$. Wir definieren Funktionen

$$\tilde{f} := \frac{|f|^p}{\int_a^b |f|^p \, dx}, \qquad \tilde{g} := \frac{|g|^q}{\int_a^b |g|^q \, dx}$$

Aus der Young'schen Ungleichung folgt $\tilde{f}(x)^{1/p}\tilde{g}(x)^{1/q} \leq \frac{\tilde{f}(x)}{p} + \frac{\tilde{g}(x)}{q}$, mit anderen Worten:

$$\begin{aligned} & \frac{|fg|}{\left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g|^q\right)^{1/q}} \leq \frac{\tilde{f}}{p} + \frac{\tilde{g}}{q} \\ \Rightarrow \qquad & \frac{\int_a^b |fg|}{\left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g|^q\right)^{1/q}} \leq \frac{\int_a^b \tilde{f}}{p} + \frac{\int_a^b \tilde{g}}{q} \\ & = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \\ & = 1. \end{aligned}$$