Abteilung für Angewandte Mathematik

M. Růžička
A. Gazca
K.Böcherer-Linder

27. Januar 2025

Analysis I

WiSe 2024/25 — Blatt 14

https://aam.uni-freiburg.de/agru/lehre/ws24/ana1/index.html

Abgabe: 03.01.2025, 12:00 Uhr.

Aufgabe 1 (6 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden uneigentlichen Integrale existieren und bestimmen Sie ihren Wert:

(i) $\int_0^1 x^{-\frac{1}{3}}\, \mathrm{d}x$.

(ii) $\int_0^\infty xe^{-x^2}\, \mathrm{d}x$.

(b) Bestimmen Sie die Stammfunktionen der folgenden Funktionen

(i) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin(x)\cos(x)$.

(ii) $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \arcsin(x)$.

Lösung:

(a) (i) Für jedes $a \in (0,1)$ ist die Einschränkung von $x \mapsto x^{-\frac{1}{3}}$ auf $[a,1]$ eine Regelfunktion. Die Stammfunktion von $x^{-\frac{1}{3}}$ ist $\frac{3}{2}x^{-\frac{2}{3}}$. Damit ist

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^{-\frac{1}{3}}\, dx &= \lim_{a\to 0}\left[\frac{3}{2}x^{-\frac{2}{3}}\right]_a^1\\ &= \lim_{a\to 0}\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}a^{-\frac{2}{3}}\right)\\ &= \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

(ii) Für jedes $b \in (0,\infty)$ ist $x \in [0,b] \mapsto xe^{-x^2}$ eine Regelfunktion. Mit der Substitution $y = -x^2 \rightsquigarrow \mathrm{d}y = -2x\mathrm{d}x$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty xe^{-x^2}\, dx &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b xe^{-x^2}\, \mathrm{d}x\\ &= \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{2}\int_0^{-b^2} e^y\, \mathrm{d}y\\ &= \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{2}e^y\right]_0^{-b^2}\\ &= \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{2}e^{-b^2} + \frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

(b) (i) Entweder kann man scharf hinsehen und bemerken, dass $\sin(x)\cos(x)$ rauskommt, wenn man $\frac{1}{2}\sin(x)^2$ ableitet, oder man kann partiell integrieren:

$$\begin{aligned}\int \sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x &= \sin(x)^2 - \int \cos(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x \\ \implies \int \sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\sin(x)^2.\end{aligned}$$

(ii) Partielle Integration:

$$\begin{aligned}\int \arcsin(x)\,dx &= x\arcsin(x) - \int x\arcsin'(x)\,dx \\ &= x\arcsin(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\end{aligned}$$

Um das hintere Integral auszurechnen, substituiere $y = 1 - x^2$ (damit $dy = -2xdx$):

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \int \frac{x}{\sqrt{y}}\left(-\frac{1}{2x}\right)\,dy \\ &= -\sqrt{y} \\ &= -\sqrt{1-x^2}\end{aligned}$$

Insgesamt:

$$\int \arcsin(x)\,dx = x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$$