Abteilung für
Angewandte Mathematik

M. Růžička
A. Gazca
K. Böcherer-Linder

21. Oktober 2024

Analysis I

WiSe 2024/25 — Blatt 2

`https://aam.uni-freiburg.de/agru/lehre/ws24/ana1/index.html`

Abgabe: 28.10.2024, 12:00 Uhr.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie mit Hilfe der Körperaxiome die folgenden Aussagen:

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$
$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad+bc}{cd}$$

Lösung:

Wir rechnen (1. Schritt: Definition des Quadrats x^2, 2. Schritt: Definition der Division $\frac{x}{2}$, 3. Schritt: Assoziativgesetz, 4. Schritt: Kommutativgesetz, 5. Schritt: Assoziativgesetz, 6. Schritt: Behauptung 1.20, 7. Schritt: Distributivgesetz, 8. Schritt: Distributivgesetz und Inverse, 7. Schritt: Distributivgesetz, 7. Schritt: Distributivgesetz, Inverse und Behauptung 1.24: $2x - 4x = 2(x - x - x) = -2x$,)

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab &= \left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2}\right) - ab \\
&= \Big(2^{-1}(a+b)\Big)\Big(2^{-1}(a+b)\Big) - ab \\
&= 2^{-1}\Big((a+b)2^{-1}\Big)(a+b) - ab \\
&= 2^{-1}\Big(2^{-1}(a+b)\Big)(a+b) - ab \\
&= \Big(2^{-1}2^{-1}\Big)(a+b)(a+b) - ab \\
&= \frac{1}{4}(a+b)(a+b) - ab \\
&= \frac{1}{4}((a+b)a + (a+b)b) - ab \\
&= \frac{1}{4}(a^2 + ba + ab + b^2) - \frac{1}{4}(4\,ab) \\
&= \frac{1}{4}(a^2 + 2\,ab + b^2 - 4\,ab) \\
&= \frac{1}{4}(a^2 - 2\,ab + b^2).
\end{aligned} \tag{1}$$

Außerdem gilt (Schritte 1-3 jeweils: Definition des Quadrats und Distributivgesetz, 4. Schritt: Assoziativgesetz und Behauptung 1.15, 5. Schritt: Kommutativgesetz):

$$\begin{aligned}
(a-b)^2 &= a(a-b) + (-b)(a-b) = a^2 - ab - b(a-b) = a^2 - ab - (ba - b^2) \\
&= a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2.
\end{aligned} \tag{2}$$

Daraus folgt (1. Schritt: Gleichungen (1) und (2), 2. Schritt: Definition des Quadrats, 3. Schritt: Kommutativ- und Assoziativgesetz, 4. Schritt: Definition des Quadrats):

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab = \frac{1}{4}(a-b)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)(a-b)(a-b) = \left(\frac{1}{2}\right)(a-b)\left(\frac{1}{2}\right)(a-b) = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

Da $x^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, gilt

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab \geq 0.$$

Addition von ab ergibt die erste Behauptung.
Zunächst gilt (1. Schritt: Distributivgesetz, 2. Schritt: Kommutativgesetz, 3. Schritt: Inverse, 4. Schritt neutrales Element):

$$\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{d}\right)cd = \frac{a}{c}\,cd + \frac{b}{d}\,cd = a\,\frac{c}{c}\,d + bc\,\frac{d}{d} = a \cdot 1 \cdot d + bc \cdot 1 = ad + bc.$$

Wegen $c, d \neq 0$ gilt $cd \neq 0$, so dass $\frac{1}{cd}$ existiert. Multiplikation mit $\frac{1}{cd}$ ergibt:

$$\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{d}\right)\frac{cd}{cd} = \left(\frac{a}{c} + \frac{b}{d}\right) = \frac{ad+bc}{cd}.$$