M. Růžička
A. Gazca
K. Böcherer-Linder

28. Oktober 2024

Analysis I

WiSe 2024/25 — Blatt 3

https://aam.uni-freiburg.de/agru/lehre/ws24/ana1/index.html

Abgabe: 04.11.2024, 12:00 Uhr.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion die *Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung:*
Seien $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}$$

Bemerkung. Die Wurzel $\sqrt{b}$ einer nicht-negativen Zahl $b \in \mathbb{R}$ wird definiert als die eindeutige Lösung der Gleichung $x^2 = b$ in $\mathbb{R}^+$. Aufgabe 1 zeigt die Existenz von $\sqrt{2}$; der allgemeine Beweis folgt analog.

Lösung:

Bemerkung: Generell gilt $xy \leq |x|\,|y|$ und $(x^2) = |x|^2$. Also genügt es die Behauptung für $a_k, b_k \geq 0$, $k = 1, \dots, n$, zu zeigen! Im Folgenden sei $a_k, b_k \geq 0$, $k = 1, \dots, n$. Da nun beide Seiten der Behauptung größer gleich Null sind, genügt es zu zeigen, dass

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right).$$

gilt.
Induktionsanfang ($n = 1$):

$$\left(\sum_{k=1}^{1} a_k b_k\right)^2 = (a_1 b_1)^2 = a_1^2 b_1^2 = \left(\sum_{k=1}^{1} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{1} b_k^2\right).$$

Induktionsanfang ($n = 2$):

$$\left(\sum_{k=1}^{2} a_k b_k\right)^2 = (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 = a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + 2\,(a_1 b_2)\,(a_2 b_1). \tag{1}$$

Für $s, t \in \mathbb{R}$ gilt $2\,st \leq s^2 + t^2$, denn $s^2 + t^2 - 2\,st = (s-t)^2 \geq 0$. Mit (1) folgt

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{2} a_k b_k\right)^2 &\leq a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + (a_1 b_2)^2 + (a_2 b_1)^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) = \left(\sum_{k=1}^{2} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{2} b_k^2\right).\end{aligned}$$

Induktionsschritt ($n \mapsto n+1$, $n \geq 2$)

$$\begin{aligned}
\Bigg(\sum_{k=1}^{n+1} a_k b_k\Bigg)^2 &= \Bigg(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \ + \ a_{n+1}\, b_{n+1}\Bigg)^2 \\
&\leq \Bigg(\Bigg(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\Bigg)^{\frac{1}{2}} \Bigg(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\Bigg)^{\frac{1}{2}} \ + \ a_{n+1} b_{n+1}\Bigg)^2 && \text{nach I.V. für } n \\
&\leq \Bigg(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \ + \ a_{n+1}^2\Bigg)\Bigg(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \ + \ b_{n+1}^2\Bigg) && \text{nach I.V. für } n = 2 \\
&\leq \Bigg(\sum_{k=1}^{n+1} a_k^2\Bigg)\Bigg(\sum_{k=1}^{n+1} b_k^2\Bigg).
\end{aligned}$$

Bemerkung: Der Induktionsschritt benutzt also den Fall n und den Fall $n = 2$.