Abteilung für Angewandte Mathematik

M. Růžička
A. Gazca
K. Böcherer-Linder

4. November 2024

Analysis I

WiSe 2024/25 — Blatt 4

`https://aam.uni-freiburg.de/agru/lehre/ws24/ana1/index.html`

Abgabe: 11.11.2024, 12:00 Uhr.

Aufgabe 1 (5 Punkte)

(a) Gegeben seien die folgenden Funktionen:

(i) $f_1 \colon \mathbb{R} \to [0, \infty) : x \mapsto x^2$,

(ii) $f_2 \colon [0, \infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}$.

Überprüfen Sie, welche dieser Funktionen injektiv, surjektiv und bijektiv sind.

(b) Schränken Sie den Definitions- und Bildbereich von f_1 und f_2 sinnvoll so ein, dass die Funktionen bijektiv werden. Geben Sie die Umkehrfunktionen samt Definitions- und Wertebereich an.

Lösung:

(a) Die Funktion f_1 ist nicht injektiv, da $f_1(1) = 1 = f_1(-1)$; f_1 ist surjektiv, da für beliebiges $z \in [0, \infty)$ ist $\sqrt{z}$ wohl definiert, und es gilt $f_1(\sqrt{z}) = z$. Also ist f_1 nicht bijektiv.

Die Funktion f_2 ist injektiv, denn aus $\sqrt{x_1} = \sqrt{x_2}$ und $x_1, x_2 \geq 0$ folgt $x_1 = x_2$. f_2 ist nicht surjektiv, da $\sqrt{x} \geq 0$ für alle $x \geq 0$. Damit liegt z.B. -1 nicht im Bildbereich. Die Funktion ist also nicht bijektiv.

(b) $f_1 : [0, \infty) \to [0, \infty) : x \mapsto x^2$, $f_2 : [0, \infty) \to [0, \infty) : x \mapsto \sqrt{x}$. Dann gilt $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1 = \mathrm{Id}$.