Abteilung für Angewandte Mathematik

M. Růžička
A. Gazca
K. Böcherer-Linder

11. November 2024

Analysis I

WiSe 2024/25 — Blatt 5

`https://aam.uni-freiburg.de/agru/lehre/ws24/ana1/index.html`

Abgabe: 18.11.2024, 12:00 Uhr.

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert

$$
\begin{aligned}
a_n &:= \sqrt{n}(\sqrt{n-1} - \sqrt{n}) \\
b_n &:= \frac{n^3 + 10n^2}{2n^3 + 13n} \\
c_n &:= \sqrt[n]{3^n + 5^n + 7^n} \\
d_n &:= \frac{n!}{10^n} \\
e_n &:= \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right).
\end{aligned}
$$

Lösung:

Es gilt $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ für $a, b \in \mathbb{R}$. Also:

$$a_n := \sqrt{n}(\sqrt{n-1} - \sqrt{n}) = \sqrt{n}\frac{\sqrt{n-1}^2 - \sqrt{n}^2}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}} = \frac{-\sqrt{n}}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{n}} + 1}$$

Andererseits, da $1 - \frac{1}{n} < \sqrt{1 - \frac{1}{n}} < 1$, gilt

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{1+1} < \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{n}} + 1} < \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right) + 1} = \frac{1}{2 - \frac{1}{n}}$$

Nun, es gilt $2 - 1 < 2 - \frac{1}{n}$ für alle n, also

$$\left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2 - \frac{1}{n}} \right| = \left| \frac{-\frac{1}{n}}{2(2 - \frac{1}{n})} \right| < \frac{1}{2n} \to 0.$$

Mit Hilfe der Präsenzaufgabe, dies zeigt, dass $a_n \to -\frac{1}{2}$.
Für b_n gilt:

$$b_n := \frac{n^3 + 10\,n^2}{2n^3 + 13n} = \frac{1 + \frac{10}{n}}{2 + \frac{13}{n^2}}$$

Da $1 + \frac{10}{n} \to 1$ und $2 + \frac{13}{n^2} \to 2$, nach dem Satz 1.3 gilt $b_n \to \frac{1}{2}$.

Für c_n gilt:

$$c_n := \sqrt[n]{3^n + 5^n + 7^n} = 7 \cdot \sqrt[n]{(3/7)^n + (5/7)^n + 1}.$$

Generell gilt $a < a^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a > 1$. Insbesondere gilt $\sqrt[n]{a} < a$. Daraus folgt $((3/7)^n + (5/7)^n + 1 > 1$ für alle n), dass

$$1 = \sqrt[n]{1} < \cdot \sqrt[n]{(3/7)^n + (5/7)^n + 1} < (3/7)^n + (5/7)^n + 1$$

Da $3/7, 5/7 < 1$, hat man $(3/7)^n + (5/7)^n + 1 \to 0$. Aus der Präsenzaufgabe folgt also, dass $c_n \to 7$.
Für n groß genug (z.B. $n \geq 10$) hat man:

$$d_n := \frac{n!}{10^n} = \frac{n}{10} \cdot \frac{n-1}{10} \cdot \dots \cdot \frac{1}{10} \overset{n \geq 10}{\geq} \frac{n}{10} \frac{9!}{10^9}$$

Man hat Gleichheit für $n = 10, 11$ und strikte Ungleichung falls $n \geq 12$. Da $\frac{n}{10} \frac{9!}{10^9} \to \infty$, muss die Folge d_n auch divergieren.
Für e_n hat man:

$$e_n := \prod_{k=2}^{n} (1 - \tfrac{1}{k^2}) = \prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} \cdots \frac{(n-2)n}{(n-1)(n-1)} \frac{(n-1)(n+1)}{n \cdot n}$$
$$\overset{\text{Kürzen}}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \to \frac{1}{2}.$$