M. Růžička
A. Gazca
K. Böcherer-Linder

18. November 2024

Analysis I

WiSe 2024/25 — Blatt 6

https://aam.uni-freiburg.de/agru/lehre/ws24/ana1/index.html

Abgabe: 25.11.2024, 12:00 Uhr.

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{2n^2 + (-1)^n}$

Hinweis für (d): Bernoulli'sche Ungleichung!

Lösung:

(a) Quotientenkriterium:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \frac{2^n}{n^2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$$

Sobald $n \geq 3$ ist dieser Ausdruck kleiner als $\frac{8}{9} =: q < 1$.

(b) Die Folge $\frac{1}{\sqrt{n}}$ ist eine monoton fallende Nullfolge. Damit ist die alternierende Reihe nach dem Leibnizkriterium konvergent. Sie ist nicht absolut konvergent, da $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$ und die harmonische Reihe divergiert.

(c) Die Reihe ist absolut konvergent mit dem Wurzelkriterium. Es ist $\sqrt[n]{a_n} = (\sqrt[n]{n} - 1)$. Setze $b_n := \sqrt[n]{n} - 1$. Dann folgt mit der binomischen Formel

$$\begin{aligned} n &= (b_n + 1)^n \\ &\geq 1 + \binom{n}{2} b_n^2 \\ \Leftrightarrow \qquad b_n &\leq \sqrt{\frac{n-1}{\binom{n}{2}}} \\ &= \sqrt{\frac{n-1}{\frac{1}{2}n(n-1)}} \\ &= \sqrt{\frac{2}{n}} \end{aligned}$$

Nun, für beliebiges $\varepsilon > 0$ gilt $\sqrt{\frac{2}{n}} < \varepsilon$, solange $n > \frac{2}{\varepsilon^2}$. Also $\sqrt{\frac{2}{n}} \to 0$ und damit ist $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 0 < 1$.

(d) Die Reihe ist absolut konvergent nach dem Quotientenkriterium:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)!n^n}{n!(n+1)^{n+1}} = \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}.$$

Nun gilt mit der Bernoulli'schen Ungleichung $(1+\frac{1}{n})^n \geq 1 + n\frac{1}{n} = 2$. Also

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \frac{1}{2}.$$

(e) Die Folge $\left(\frac{n+1}{2n^2+(-1)^n}\right)$ ist eine monoton fallende Nullfolge. Beweis: Sei $a_n := \frac{n+1}{2n^2+(-1)^n}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
a_{n+1} - a_n &= \frac{n+2}{2(n+1)^2 + (-1)^{n+1}} - \frac{n+1}{2n^2 + (-1)^n} \\
&\leq \frac{n+2}{2(n+1)^2 - 1} - \frac{n+1}{2n^2+1} \\
&= \frac{(n+2)(2n^2+1) - (n+1)(2(n+1)^2-1)}{(2(n+1)^2-1)(2n^2+1)} \\
&= \frac{4n^2+2n+3-(6n^2+6n+2)}{(2(n+1)^2-1)(2n^2+1)} \\
&< 0.
\end{aligned}$$

Also folgt die Konvergenz der alternierenden Reihe wieder mit dem Leibnizkriterium.

Die Reihe ist nicht absolut konvergent, da $\frac{n+1}{2n^2+(-1)^n} \geq \frac{n+1}{2n^2+2n} = \frac{1}{2n}$ und die harmonische Reihe divergiert.