M. Růžička
A. Gazca
K. Böcherer-Linder

2. Dezember 2024

Analysis I

WiSe 2024/25 — Blatt 8

https://aam.uni-freiburg.de/agru/lehre/ws24/ana1/index.html

Abgabe: 9.12.2024, 12:00 Uhr.

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Die Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{falls } x \text{ rational} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

In welchen Punkten des Intervalls $[0,1]$ ist f stetig und in welchen unstetig?

Lösung:

Behauptung: Die Funktion f ist in 0 stetig.
Beweis: Wir benutzen Satz 2.6 in Kapitel 4. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $[0,1]$ mit $x_n \to 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |f(x_n)| &= \begin{cases} x_n, & \text{falls } x_n \text{ rational} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \\ &\le x_n. \end{aligned}$$

Also folgt aus Aufgabe 2 (Blatt 5), dass $f(x_n) \to 0$. Nach Satz 2.6 (Kapitel 4) ist f stetig.

Behauptung: f ist unstetig in allen $x \in (0,1]$.
Beweis: Wir benutzen wieder Nach Satz 2.6 (Kapitel 4). Sei $x_0 \in (0,1]$.
Fall 1: $x_0 \in \mathbb{Q}$. In diesem Fall ist $f(x_0) = x_0$. Sei Definiere eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $x_n = x_0(1 - \frac{1}{n\sqrt{2}})$. Dann ist $x_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\ \forall n$ und somit $f(x_n) = 0\ \forall n$. Da aber $x_0 = f(x_0) > 0$ gilt, kann $f(x_n)$ nicht gegen $f(x_0)$ konvergieren. Also ist f in x_0 nicht stetig.
Fall 2: $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. In diesem Fall ist $f(x_0) = 0$. Nachdem $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt, gibt es eine Folge $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{Q}$ mit $q_n \to x_0$. Nach Definition von f gilt $f(q_n) = q_n \to x_0 \neq 0$. Also ist f nicht stetig in x_0.