Blatt Nr. 0
Mengen, σ-Algebren und Maße

13. Oktober 2025

Keine Abgabe

Diese Aufgaben werden in der ersten Woche in den Übungsgruppen besprochen und müssen nicht individuell bearbeitet werden.

1. Aufwärmübung – die de-morganschen Regeln. Sei X eine Menge. Betrachten Sie eine Familie von Teilmengen $\{A_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{P}(X)$. Zeigen Sie, dass:

a) $X \setminus \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} X \setminus A_i$,

b) $X \setminus \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I} X \setminus A_i$.

2. Sind dies σ-Algebren?. Entscheiden Sie, ob die folgenden Mengensysteme σ-Algebren sind.

a) Die „Projektion" $\{\pi(A) : A \in \mathcal{A}\}$, wobei $(X \times Y, \mathcal{A})$ eine messbarer Raum ist, und

$$\pi \colon X \times Y \to X, \quad \pi(x,y) \coloneqq x$$

die kanonische Projektion ist.

b) Die Vereinigung $\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(\{\{1\},\ldots,\{n\}\})$.

3. Endlich oder überabzählbar. Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum. Wir möchten zeigen, dass $\mathcal{A}$ entweder endlich oder überabzählbar ist. Für jedes $x \in X$ definieren wir

$$\operatorname{at}(x) \coloneqq \bigcap \{A \in \mathcal{A} : x \in A\}.$$

a) Zeigen Sie, dass für jedes $x, y \in X$,

$$\operatorname{at}(x) \cap \operatorname{at}(y) \neq \varnothing \quad \Rightarrow \quad \operatorname{at}(x) = \operatorname{at}(y).$$

b) Nehmen Sie an, dass $\mathcal{A}$ abzählbar ist. Zeigen Sie, dass $\operatorname{at}(x) \in \mathcal{A}$ für jedes $x \in X$, und $A = \bigcup_{x\in A} \operatorname{at}(x)$ für jedes $A \in \mathcal{A}$.

c) Leiten Sie daraus einen Widerspruch ab.

4. Atomloses Maß. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Das Maß μ heißt atomlos, wenn für jedes $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) > 0$ ein $B \subset A$ mit $0 < \mu(B) < \mu(A)$ existiert. Zeigen Sie, dass es für ein atomloses Maß μ, Mengen beliebig kleinen Maßes gibt.