Analysis III
Prof. Dr. Michael Růžička
Dr. Luciano Sciaraffia

Blatt Nr. 2
Messbare Funktionen. Äußere Maße

20. Oktober 2025

Abgabe am 27. Oktober 2025

Das Hausdorffmaß. Sei (X,d) ein metrischer Raum. Für $\alpha, \delta \geq 0$, $A \subset X$ definieren wir

$$\mathcal{H}^\alpha_\delta(A) \coloneqq \inf\left\{\sum_{n=1}^\infty (\operatorname{diam} F_n)^\alpha : A \subset \bigcup_{n=1}^\infty F_n,\ \operatorname{diam} F_n \leq \delta\right\},$$

und

$$\mathcal{H}^\alpha(A) \coloneqq \lim_{\delta \downarrow 0} \mathcal{H}^\alpha_\delta(A).$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{H}^\alpha$ ein äußeres Maß auf X ist.

1. (4 Punkte). Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ eine Folge numerischer messbarer Funktionen. Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen messbar sind:

a) $K \coloneqq \big\{x \in X : \{f_n(x)\}_{n=1}^\infty \text{ ist Cauchy in } \mathbb{R}\big\}$,

b) $L \coloneqq \big\{x \in X : \lim_{n\to\infty} f_n(x) \in \overline{\mathbb{R}} \text{ existiert}\big\}$.

2. (6 Punkte) Fast-überall Konvergenz. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Seien $f, g, f_n, g_n \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, beliebige Funktionen. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Aus $f_n \to f$ μ-fast-überall und $f_n \to g$ μ-fast-überall folgt $f = g$ μ-fast-überall.

b) Aus $f_n \to f$ μ-fast-überall und $f = g$ μ-fast-überall folgt $f_n \to g$ μ-fast-überall.

c) Wenn $f_n \to f$ μ-fast-überall konvergiert und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $f_n = g_n$ μ-fast-überall, dann gilt $g_n \to f$ μ-fast-überall.

3. (5 Punkte) Die Würfeln erzeugen die Topologie. Beweisen Sie, dass sich jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ als abzählbare Vereinigung von offenen Würfeln darstellen läßt. Hierbei ist ein Würfel eine Menge der Form

$$x + (-\ell/2, \ell/2)^n \coloneqq \{x + y : y \in (-\ell/2, \ell/2)^n\},$$

wobei x das Zentrum des Würfels und ℓ die Seitenlänge ist.