

Blatt Nr. 4 Halbringe und Inhalte

3. November 2025

Abgabe am 10. November 2025

Nullmengen. Sei $\lambda: \mathcal{Q} \rightarrow [0, \infty]$ ein Prämaß auf dem Halbring $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}(X)$, und sei $\mu: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ seine Carathéodory-Fortsetzung. Beweisen Sie, dass $E \subset X$ genau dann eine μ -Nullmenge ist, wenn es eine Folge $\{A_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{Q}$ gibt so, dass jedes $x \in E$ zu unendlich vielen A_n gehört, und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) < \infty.$$

1. (4 Punkte) Ein Beispielhalbring. Sei $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ nicht-leer, durchschnitts-stabil und vereinigungsstabil. Wir definieren

$$\mathcal{H} := \{A \setminus B : A, B \in \mathcal{E}\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{H}$ ein Halbring ist.

2. (4 Punkte) Grenzwert von Prämaßen. Sei $(\mu_n)_{n=1}^\infty$ eine isotone Folge von Prämaßen auf einem Ring $\mathcal{R}$, das heißt, $\mu_n(A) \leq \mu_{n+1}(A)$ für alle $A \in \mathcal{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$\mu_\infty(A) := \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A)$$

ein Prämaß auf $\mathcal{R}$ definiert.

3. (7 Punkte) Inhalte auf Intervallen. Sei $\mathcal{J} := \{(a, b] \subset \mathbb{R} : a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$ der Halbring der links-offenen, rechts-abgeschlossenen Intervalle.

- a) Sei $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine (nicht unbedingt strikt) monoton wachsende Funktion. Zeigen Sie, dass durch $\mu_F((a, b]) := F(b) - F(a)$ ein endlicher Inhalt auf $\mathcal{J}$ definiert wird.
- b) Seien $F, G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monoton wachsende Funktionen. Zeigen Sie, dass $\mu_F = \mu_G$ genau dann, wenn $F - G$ konstant ist.
- c) Sei μ ein endlicher Inhalt auf $\mathcal{J}$ und definiere $F_\mu: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$F_\mu(x) := \begin{cases} +\mu((0, x]) & \text{für } x \geq 0, \\ -\mu((x, 0]) & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass F_μ monoton wachsend ist und $\mu_{F_\mu} = \mu$ gilt.

- d) Sei $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monoton wachsend. Zeigen Sie $F = F_{\mu_F} + F(0)$.