

Blatt Nr. 5

Dynkin-Systeme, monotone Klassen und Produkträume

10. November 2025

Abgabe am 17. November 2025

1. (8 Punkte) F_σ - und G_δ -Mengen. Seien (X, d) ein metrischer Raum, $\mathcal{O}$ das System aller offenen Untermengen von X und $\mathcal{B}$ die Borel- σ -Algebra auf X . Eine Menge $E \subset X$ heißt F_σ -Menge, falls sie als eine abzählbare Vereinigung abgeschlossener Mengen darstellbar ist. Die Menge E heißt G_δ -Menge, falls sie als ein abzählbarer Durchschnitt offener Mengen darstellbar ist. Die Systeme aller F_σ - bzw. G_δ -Untermengen von X bezeichnen wir mit $\mathcal{F}_\sigma$ bzw. $\mathcal{G}_\delta$.

Zeigen Sie das Folgende:

- a) Sei $E \subset X$ offen oder abgeschlossen. Dann gilt $E \in \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{G}_\delta$.
- b) Das Mengensystem $\mathcal{A} := \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{G}_\delta$ ist eine Algebra.
- c) Es gilt $\mathcal{M}(\mathcal{O}) = \mathcal{M}(\mathcal{A})$.
- d) Es gilt $\mathcal{M}(\mathcal{O}) = \mathcal{B}$.

2. (3 Punkte). Sei X eine Menge und $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$. Sei $\mathcal{F}$ das System aller endlichen Durchschnitte von Mengen aus $\mathcal{E}$. Beweisen Sie, dass gilt $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{D}(\mathcal{E})$ genau dann, wenn $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}(\mathcal{E})$.

3. (6 Punkte). Seien X eine Menge, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ ein $\cap$ -stabiles System und μ_1, μ_2 endliche Maße auf $\sigma(\mathcal{A})$, die $\mu_1 = \mu_2$ auf $\mathcal{A}$ und $\mu_1(X) = \mu_2(X)$ erfüllen. Definieren Sie

$$\mathcal{D} := \{A \in \sigma(\mathcal{A}) : \mu_1(A) = \mu_2(A)\}.$$

Zeigen Sie das Folgende:

- a) $\mathcal{D}$ ist ein Dynkin-System.
- b) $\mu_1 = \mu_2$ auf $\sigma(\mathcal{A})$.

Finden Sie eine Menge X , ein $\cap$ -stabiles System $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ und Maße μ_1, μ_2 auf $\sigma(\mathcal{A})$, sodass $\mu_1 = \mu_2$ auf $\mathcal{A}$ und

- c) $\mu_1(X) \neq \mu_2(X)$ gilt und sowohl a) als auch b) sind falsch;
- d) $\mu_1(X) = \mu_2(X) = \infty$ gilt und sowohl a) als auch b) sind falsch.

4. (3 Punkte) Produkt-Messbarkeit. Seien $(X_i, \mathcal{A}_i), (Y_i, \mathcal{B}_i)$ nichtleere messbare Räume, und $f_i: X_i \rightarrow Y_i$ Abbildungen, $i \in I$. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f: \prod_{i \in I} X_i \rightarrow \prod_{i \in I} Y_i, \quad f((x_i)_{i \in I}) := (f_i(x_i))_{i \in I},$$

genau dann $\bigotimes_{i \in I} \mathcal{A}_i$ - $\bigotimes_{i \in I} \mathcal{B}_i$ -messbar ist, wenn für alle $i \in I$ f_i $\mathcal{A}_i$ - $\mathcal{B}_i$ -messbar ist.