

Blatt Nr. 6 Das Lebesguemaß

17. November 2025

Abgabe am 24. November 2025

Stetiges Bild einer Lebesgue-messbaren Menge. Betrachten Sie die Folge stetiger Funktionen $f_n: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definiert durch

$$f_0(x) := x, \quad f_{n+1}(x) := \begin{cases} \frac{1}{2}f_n(3x), & x \in [0, \frac{1}{3}], \\ \frac{1}{2}, & x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}f_n(3x-2), & x \in [\frac{2}{3}, 1], \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}.$$

- a) Zeigen Sie, dass $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ gleichmäßig gegen eine stetige Funktion $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ konvergiert.
- b) Zeigen Sie, dass f monoton wachsend ist. Folgern Sie, dass

$$\phi: [0, 1] \rightarrow [0, 1], \quad \phi(x) := \frac{1}{2}(x + f(x))$$

ein Homöomorphismus ist.

- c) Sei K die Cantormenge. Zeigen Sie, dass $\phi(K)$ Lebesgue-messbar ist, mit Maß $\frac{1}{2}$.
- d) Zeigen Sie, dass $A \subset \mathbb{R}$ genau dann eine Lebesgue-Nullmenge ist, wenn alle seine Teilmengen $B \subset A$ Lebesgue-messbar sind. (Hinweis: Vitalimenge.)
- e) Zeigen Sie, dass eine Lebesgue-messbare Menge A existiert so, dass $\phi(A)$ nicht messbar ist.

1. (3 Punkte) Das Lebesguemaß ist ein metrisches äußeres Maß. Seien $A, B \subset \mathbb{R}^d$. Angenommen, es existiert ein $\delta > 0$ so, dass für alle $a \in A$ und $b \in B$ $|a - b| > \delta$ gilt. Zeigen Sie, dass dann für das äußere Lebesguemaß λ^d

$$\lambda^d(A \cup B) = \lambda^d(A) + \lambda^d(B)$$

gilt.

2. (5 Punkte). Sei λ^d das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^d$.

- a) Zeigen Sie, dass jede Menge vom Maß Null ein leeres Inneres hat.

- b) Zeigen Sie, dass für jedes $\varepsilon > 0$ eine dichte offene Menge O in $\mathbb{R}^d$ existiert, sodass $\lambda^d(O) \leq \varepsilon$.
- c) Zeigen Sie, dass für jedes $\varepsilon > 0$ eine abgeschlossene Menge F mit leerem Inneren existiert, sodass für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ gilt:

$$\lambda^d(A \cap F) \geq \lambda^d(A) - \varepsilon.$$

3. (7 Punkte) Das Lemma von Sard – Dimension 1. Seien $-\infty < a < b < \infty$ und $f \in C^1([a, b])$.

- a) Sei $E := \{x \in (a, b) : f'(x) = 0\}$. Zeigen Sie, dass $f(E)$ eine Lebesgue-Nullmenge ist. (Hinweis: Sie können Lemma 6.16 aus der Vorlesung benutzen.)
- b) Sei $G := \{x \in [a, b] : f(x) = 0\}$ und $H := \{x \in [a, b] : f(x) = 0, f'(x) = 0\}$. Zeigen Sie, dass $G \setminus H$ eine Lebesgue-Nullmenge ist. (Hinweis: Zeigen Sie, dass $A_n := \{x \in (a, b) : f(x) = 0, |f'(x)| \geq \frac{1}{n}\}$ nur endlich viele Elemente enthält.)